

**СКРИПТА ЗА ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ
ОПШТЕГ КУРСА ФИЗИЧКЕ ХЕМИЈЕ I**

2017/2018

1. ФИЗИЧКО-ХЕМИЈСКИ ЕКСПЕРИМЕНТ

Ово поглавље бави се мерењима и обрадом резултата мерења. Посебну пажњу у овом поглављу треба обратити на расподелу резултата мерења и суштинску разлику између грешке и несигурности резултата.

1.1. Мерење и класификације мерења

Као резултат експеримента добија се број или низ бројева. Процес придруживања бројне вредности физичкој величини назива се **мерење**. Да би овај процес придруживања био могућ мора постојати **јединица мере** за сваку величину и **процедура за поређење** вредности мерене величине са том јединицом мере.

Пример 1.1. Мерење дужине

Ако нас занима која је дужина стола, мерење можемо извршити у два корака. Први корак би био да дефинишемо јединицу мере, па нека у овом случају то буде дужина палца. Други корак би био да одредимо колико пута се дужина палца садржи у дужини стола. Процес је једноставан и свео би се на надовезивање дужине палца све док не истрошимо целу дужину стола.

Проблем оваквог мерења је врло јасан. Како би два експериментатора могла да упореде своје резултате мора постојати јединствен систем јединица. Данас је усвојен **SI систем јединица** (Sistem International) који се заснива на седам основних физичких величина (Прилог).

Ако желимо да извршимо мерење на неком систему (мерени систем) морамо да га доведемо у контакт са системом код кога бројна вредност одређене променљиве на познат и једнозначан начин зависи од величине коју хоћемо да меримо у систему од интереса. Овај други систем називамо **мерни систем**. У току процеса мерења интеракција **мерени систем** ↔ **мерни систем** треба да буде сведена на минимум.

Пример 1.2. Мерење температуре

Ако желимо да измеримо температуру течности у чаши потребно је да систем (чаша+течност) доведемо у контакт са мерним системом - термометром. Када доведемо у контакт ова два система долази до размене топлоте између њих. Када се успостави термална равнотежа (када се изједначе температуре и нема макроскопске размене топлоте између мереног и мерног система) мерењем висине живиног стуба у капилари термометра, можемо одредити колика је температура течности у чаши. На сличан начин можемо мерити температуру на основу вредности електричног отпора металне жице или термоелектромоторне силе на крајевима термометра. Оно што нам је неопходно у сва три случаја је веза између индикаторске величине (дужина капиларе, електрични отпор, термо-електромоторна сила,...) и мерене величине. Ако ова зависност није позната можемо је успоставити процесом калибрације мерног система (инструмента). Што се тиче интеракције мерни систем \leftrightarrow мерени систем, идеалан термометар би требало да има нулти топлотни капацитет. У реалном случају топлотни капацитет има коначну вредност, а задатак експериментатора је да изабере термометар који ће најмање пореметити (пертурбовати) мерени систем.

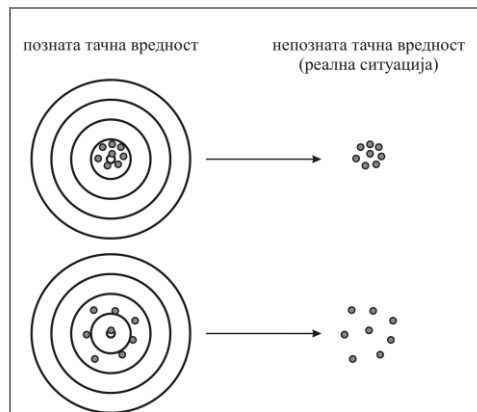
Мерења се могу класификовати на основу више критеријума. Једна од могућих подела је према облику функционалне зависности између тражене величине и оне коју непосредно меримо, као и начину на који се долази до бројне вредности мерене величине. **Директна мерења** су она код којих вредност налазимо директно читавањем на скали мерног инструмента. Као **индиректна мерења** класификују се она код којих не меримо директно величину A која нас занима него неке друге величине a_1, a_2, \dots , а након тога бројну вредност величине од интереса израчунавамо из претпостављене функционалне зависности $A=A(a_1, a_2, \dots)$. Последњи начин мерења је **параметарско (функционално) мерење** код кога мерене вредности налазимо као параметре функционалне зависности између других величина које меримо директно или индиректно. Пример овог типа мерења је мерење моларног апсорпционог коефицијента на основу функционалне зависности апсорбанције раствора и његове концентрације као што је описано у делу 5.4.

1.2. Квалитети мерења и врсте експерименталних грешака

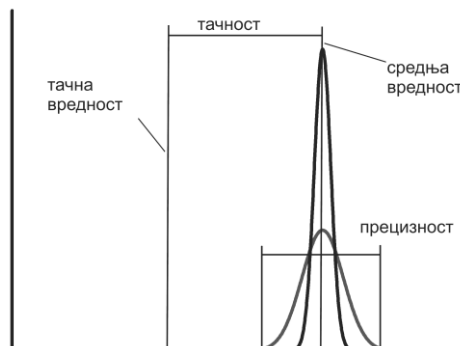
Основни квалитети мерења су **прецизност**, **тачност**, **репетабилност** и **репродуктивност**. Према IUPAC-у, **прецизност** се односи на расипање резултата поновљених мерења под идентичним условима око неке средње вредности. Као прецизније мерење сматра се оно код кога се поновљена мерења мање разликују међу собом. На слици 1.1а (лево) дат је пример два мерења која се разликују по прецизности.

С друге стране, треба приметити да су на слици 1.1а мерења концентрисана око неке вредности која је у оба случаја иста (центар мете). Ако се центар мете дефинише као тачна вредност мерења, онда оба мерења имају приближно исту тачност. **Тачност** се дефинише као одступање средње вредности резултата мерења од тачне вредности мерене величине. Тачна вредност обично остаје непозната па би ситуација на десној страни слике 1.1а одговарала реалности. На слици 1.1б приказан је однос између тачности и прецизности у серији поновљених мерења. Крива даје расподелу резултата (види даље), а ширина расподеле се односи на прецизност мерења. Разлика максимума криве који даје средњу вредност мерења и тачне вредности представља тачност мерења.

Репетабилност се дефинише као слагање независних резултата мерења добијених истом методом на идентичном узорку при константним



Слика 1.1а. Пример два мерења која дају приближно исту средњу вредност, али се разликују по прецизности. У реалности, тачна вредност је непозната (не знамо где је центар мете).



Слика 1.1б. Расподела резултата реалних мерења и однос прецизности и тачности мерења.

условима (исти истраживач, апаратура, лабораторија и кратак временски период између мерења). **Репродуктивност** се дефинише као слагање независних резултата мерења добијених истом методом на на идентичном узорку под различитим условима (различити истраживачи, апаратуре, лабораторије и/или након дугих временских периода).

Свако мерење неке физичке величине води резултату који се у општем случају разликује од тачне вредности дате мерене величине. Одступање резултата мерења од тачне вредности назива се **грешка мерења**. Експерименталне грешке се могу поделити на **систематске** и **случајне** (статистичке) грешке, при чему се систематске грешке даље могу поделити на неколико типова. На самом експериментатору је да максимално умањи систематске грешке. Случајне грешке се манифестују као различити исходи поновљених мерења под истим експерименталним условима. Извори ових грешака су нестабилност експерименталних услова, прецизност инструмената и суштинска стохастичност физичких појава. Прва два узрока се могу делимично редуковати, али трећи извор је увек присутан и постоји начин да се егзактно третира. Овде је важно истаћи да се случајне и систематске грешке обично међусобно искључују. У првом граничном случају случајне грешке су прекривене систематским грешкама и флукуације у мереној величини не могу да се уоче, а поновљена мерења дају исте резултате. Други гранични случај је када су систематске грешке максимално умањене и до изражаја долазе само случајне флукуације у мереном систему.

1.3. Расподела резултата мерења директно мерене величине

Ако понављамо мерење неке физичке величине уочићемо да се бројне вредности исхода мерења разликују почевши од неке цифре. Цифре које су исте у свим резултатима и не флукуирају називају се **сигурне цифре**. С обзиром да су флукуације случајне, можемо тврдити да је резултат мерења случајна (алеаторна) променљива (варијабла) и да као таква има неки закон расподеле. Расподелу резултата мерења можемо окарактерисати егзактно средњом вредношћу μ (**тачна вредност**) и **средњим квадратним одступањем** σ^2 (**дисперзија** или **варијанса**, корен из варијансе се назива **стандардна девијација**) само у случају да број мерења тежи бесконачном. Ове величине су дефинисане са:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1.1)$$

и

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (1.2)$$

Како је број мерења коначан (и често врло мали) потребна је нека разумна процена тачне вредности и варијансе. Из математичке статистике следи резултат да су (оправдане) процене (тачне) средње вредности и варијансе **средња вредност** x_{sr} и **процењена стандардна девијација** S :

$$x_{sr} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1.3)$$

$$S = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{sr})^2}{n-1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.4)$$

У овом смислу треба поменути Гаусову или нормалну расподелу која је описана једначином:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right]}. \quad (1.5)$$

Она је изузетно важна с обзиром да се у случају довољно великог броја мерења ($n > 30$) резултати (скоро увек) покуравају овој расподели. Много је важнија чињеница да се средње вредности серија поновљених мерења исте величине покуравају нормалној расподели када узорак (број мерења у серији) тежи бесконачности. Са задовољавајућом апроксимацијом можемо узети да је расподела средњих вредности серија мерења нормална када број мерења прелази 30. Параметре расподеле средњих вредности серија

поновљених мерења могуће је проценити. Математичка статистика каже да је процена средње вредности средњих вредности коју ћемо означавати са \bar{x} на основу сета од n мерења дата средњом вредношћу резултата мерења:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1.6)$$

а стандардна девијација расподеле средњих вредности (назива се и стандардна грешка средње вредности) дефинисана је са:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}. \quad (1.7)$$

У случају да је број појединачних мерења у једној серији мањи од 30 (што је врло често случај) показано је да се величина дефинисана са:

$$t = \frac{(x - \bar{x})\sqrt{n}}{S} \quad (1.8)$$

покрава Студентовој t -расподели дефинисаној са:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi v}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} \quad (1.9)$$

У горњој једначини са v је означен број степени слободе, а са Γ гама функција дефинисана са:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (1.10)$$

за $x > 0$. За једну серију од n мерења број степени слободе дат је са:

$$v = n - 1. \quad (1.11)$$

Ако је број мерења већи од 30, Студентова расподела се поклапа са Гаусовом.

Имајући у виду дату дискусију јасно је да, ако су резултати мерења случајне величине (узмимо у овом случају континуалне), вероватноћа да је резултат мерења **број** једнака је нули. Стога треба имати у виду да свако појединачно мерење приписује бројну вредност мереној физичкој величини у интервал чија је ширина дефинисана осетљивошћу инструмента, односно најмањим делом мерене величине која се под датим условима може мерити. Дакле, резултат сваког мерења је неки **интервал** који са одређеном вероватноћом гарантује проналажење тачне вредности. Како на одговарајући начин проценити овај интервал и комбиновати доприносе различитих фактора биће речи у даљем тексту.

1.4. Грешка и несигурност

Разлика између грешке и несигурности је суштинска. **Грешка** је дефинисана као разлика резултата појединачног мерења и његове праве (тачне) вредности, дакле као мера одступања. **Несигурност** је параметар повезан са резултатом мерења који карактерише дисперзију резултата која се оправдано може придружити мереној величину (параметар може бити стандардна девијација или неки њен умножак или ширина интервала поверења). Иако појам несигурност означава сумњу, несигурност мерења се не односи на сумњу у квалитет мерења, него му управо даје адекватну тежину и поверење у валидност мерења. Несигурност укључује све могуће врсте грешака које могу да утичу на резултат мерења. Сви доприноси несигурности се комбинују на одговарајући начин у несигурност коначног резултата. Несигурност мерена величине A се често означава са $u(A)$ (од енглеског uncertainty) или ΔA .

Овде ће бити третиране само несигурности које потичу од самог мерења. Неће бити разматрани сви могући доприноси који утичу на укупну несигурност методе. Процена несигурности методе је знатно компликованији задатак и постоје детаљна упутства о томе како то извести. Читаоцу се препоручује одговарајућа литература из ове области (реф. 3).

1.5. Несигурност директног мерења

Несигурност директног мерења која потиче од систематских грешака процењује се на основу класе тачности инструмента или половине најмањег подеока, а резултат се приказује као **бројна вредност ± несигурност**. Овако представљен резултат тумачи се као могућност налажења тачне (стварне) вредности у интервалу (*број-несигурност*, *број+несигурност*) са подједнаком вероватноћом (укупна вероватноћа да се тачна вредност нађе у овом интервалу је 100 %). Овакав начин процене несигурности је директан и логичан, а прибегава му се када је осетљивост инструмента мала и до изражаја не долазе случајне грешке. Слично се процењује несигурност табличног резултата: као несигурност узима се половина последњег децималног места.

Пример 1.3.

Ако меримо дужину стола метарском траком која има поделу на милиметре, у низу поновљених мерења можемо само да константујемо да је дужина стола увек иста и да је проценимо на најближи поделак на скали. Ако је измерена вредност дужине стола 55,3 cm, процењена несигурност једнака је 0,05 cm.

Уколико инструмент има велике подеоке на скали, оправдано је визуелно поделити један подеок на мање делове и проценити мерену вредност. При томе треба имати у виду да се несигурност процени пажљиво, односно да се не потцени, али исто тако и да се не прецени. Наравно, много боља опција је да се за мерење примени инструмент са финијом поделом.

Претпоставимо сада да имамо врло осетљив инструмент (до изражаја долазе случајне грешке) и да смо извршили серију од N мерења. Наши резултати се покуравају одређеној расподели, али ће се средње вредности поновљених серија N мерења ($N > 30$) покоравати нормалној расподели са процењеном средњом вредношћу:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N} \quad (1.12)$$

и стандардном девијацијом:

$$S_x^- = \frac{S}{\sqrt{N}}. \quad (1.13)$$

У пракси никада не понављамо више серија N мерења, али можемо да тврдимо да ће се тачна вредност наћи у интервалу

$$\left(\bar{x} - S_x^-, \bar{x} + S_x^-\right) \quad (1.14)$$

са вероватноћом која је према особинама нормалне расподеле једнака 68%. Ако желимо да се тачна вредност нађе у неком интервалу (који се зове интервал поверења) са већом вероватноћом потребно је узети шири интервал. Тако се у интервалу

$$\left(\bar{x} - 2S_x^-, \bar{x} + 2S_x^-\right) \quad (1.15)$$

тачна вредност налази са вероватноћом 95%. Ствар се додатно компликује када је број мерења N мањи од 30. Тада важи Студентова t -расподела, а интервал поверења има ширину која, осим од жељене вероватноће, зависи и од броја мерења, односно броја степени слободe ($N - 1$). Тада је коначан резултат у облику

$$\bar{x} \pm t_{v,CL} S_x^- \quad (1.16)$$

где је са CL означен ниво поверења (енг. confidence level) који представља вероватноћу са којом се тачна вредност налази у датом интервалу, а v је број степени слободe. Детаљи о овоме се могу наћи у литератури која се бави исључиво обрадом резултата мерења. Овде ћемо несигурност директно мерене величине у случају мерења довољне осетљивости изражавати као:

$$u(x) = S_x^-. \quad (1.17)$$

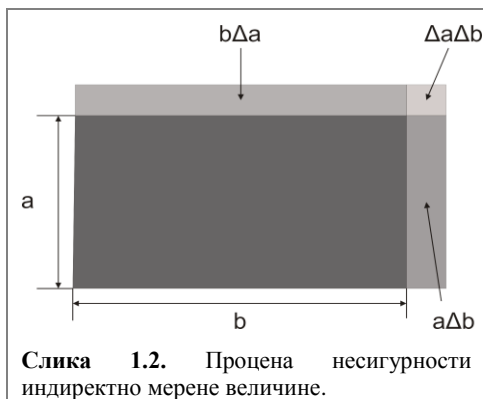
Пример 1.4.

Ако су резултати 4 поновљена мерења масе у грамима: 3,2594; 3,2597; 3,2591 и 3,2593, израчунати средњу вредност и стандардну девијацију резултата.

| мерење | m_i [g] | $(m_i - \bar{m})$ [g] | $(m_i - \bar{m})^2$ [g ²] |
|---------------|-----------|-----------------------|---------------------------------------|
| 1 | 3,2594 | 0,000025 | 6,25E-10 |
| 2 | 3,2597 | 0,000325 | 1,06E-07 |
| 3 | 3,2591 | -0,000275 | 7,56E-08 |
| 4 | 3,2593 | -0,000075 | 5,62E-09 |
| Σ | 13,0375 | 0 | 1,875E-07 |
| \bar{m} [g] | 3,25938 | | |
| S [g] | | | 2.500E-04 |
| S_x [g] | | | 1,25E-4 |

1.6. Пропагирање несигурности – несигурност индиректно мерене величине

Поставља се питање како наћи несигурност индиректно мерене величине. Овај проблем може се разрадити на примеру одређивању површине правоугаоника ивица a и b . Површина је једнака $P=ab$, а ако су несигурности дужина ивица Δa и Δb , поставља се проблем проналажења несигурности израчунате површине, ΔP . Једноставним рачуном се добија:



$$P = (a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b) \quad (1.18a)$$

$$P = ab \pm (a\Delta b \pm b\Delta a) + \Delta a\Delta b. \quad (1.18b)$$

Ако занемаримо производ $\Delta a\Delta b$ који је бесконачно мала величина другог реда у односу на ab добијамо да је систематска несигурност површине $\Delta P = b\Delta a + a\Delta b$ (слика 1.2). За било коју функцију $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ несигурност је могуће проценити као:

$$u(y) = \Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial y}{\partial x_n} \right| \Delta x_n. \quad (1.19)$$

Дакле, несигурност индиректно мерене величине једнака је суми несигурности директно мерених величина отежињених апсолутним вредностима одговарајућих парцијалних извода функционалне зависности $y=y(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Одавде следи и погодна тактика за смањење укупне несигурности резулата: смањити несигурност оне величине x_i која најбрже мења вредност индиректно мерене величине y (y има највећи парцијални извод по тој променљивој x_i). Овај начин пропагације несигурности назива се **линеарна пропагација**.

Показује се да једначина (1.19) даје процену максималне несигурности резулата. Често се показује да је у случају директно мерених величина које су некорелисане, погодније користити следећи начин пропагирања несигурности:

$$u(y) = \Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2}. \quad (1.20)$$

Овакав начин пропагације несигурности се назива **пропагација по квадратима**.

Пример 1.5. Таблични примери линеарног пропагирања несигурности индиректно мерених величина

| y | $u(y) (\Delta y)$ |
|-------------|--------------------------------------------------|
| $a^n + b^m$ | $na^{n-1} \Delta a + mb^{m-1} \Delta b$ |
| $a^n b^m$ | $na^{n-1} \Delta a b^m + a^n m b^{m-1} \Delta b$ |
| $\exp(a)$ | $\exp(a) \Delta a$ |
| $\ln(a)$ | $\Delta a / a$ |

Пример 1.6

Нека је тражена величина $A=a+b^2$ и нека су a и b директно мерене величине. Потребно је израчунати вредност A и проценити несигурност добијеног резулата на основу измерених вредности a и b и њихових процењених несигурности.

| директно мерена величина | измерена вредност | процењена несигурност |
|--------------------------|-------------------|-----------------------|
| a | 256 | 1 |
| b | 34,78 | 0,05 |

Вредност A се лако израчунава

$$A=256+34,78^2=1465.65$$

Према једначини (1.19) несигурност A је дата са:

$$u(A) = \Delta A = \Delta a + 2b\Delta b$$

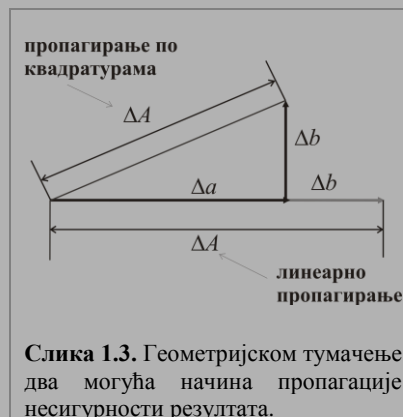
$$u(A) = 1 + 2 \cdot 34,78 \cdot 0,05 = 4,48$$

Ако је оправдано сматрати да су процењене несигурности директно мерених величина независне и случајне, према једначини (1.20) несигурност A је дата са:

$$u(A) = \Delta A = \sqrt{\Delta a^2 + (2b)^2 \Delta b^2}$$

$$u(A) = \sqrt{1+12,10} = 3,62$$

Треба приметити да је процењена несигурност добијена линеарним пропагирањем већа од несигурности процењене пропагирањем по квадратурама. Ово се може разумети на основу једноставног геометријског разматрања (слика 1.3)



Треба напоменути да линеарно пропагирање несигурности даје увек већу вредност од оне која се процени промагирањем по квадратурама. У том смислу, оправдано је увек пропагирати несигурности линеарно јер се на овај начин добија горња граница несигурности резултата. Ипак, треба имати у виду да се на овај начин несигурност резултата (неоправдано) увећава, а да у неким случајевима постоје прописане процедуре начина на који се мора проценити несигурност резултата. Имајући у виду наведено, несигурности резултата рачунате у поглављима која следе из овога су добијене линеарним пропагирањем, а показано је како се лако могу извести различити изрази за несигурност индиректно мерене величине у различитим случајевима.

1.7. Одређивање параметара линеарне зависности методом најмањих квадрата: параметарско мерење

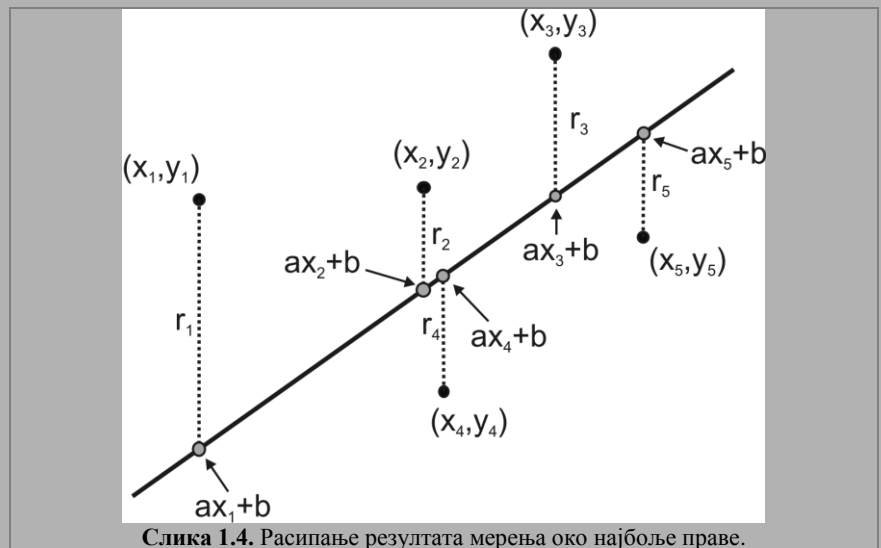
Претпоставимо да имамо серију n парова две измерене величине, (x_i, y_i) , и да између њих постоји линеарна зависност типа:

$$y = a + bx. \quad (1.21)$$

Најбоље вредности параметара a и b могу се пронаћи методом најмањих квадрата која је заснована на минимизовању разлике између експериментално одређених вредности y_i и оних које се добијају на основу претпостављене праволинијске зависности (слика 1.4).

Метода најмањих квадрата је нумеричка метода за одређивање параметара одређене зависности $f(X; \beta_i)$ на основу низа мерених вредности (X_k, y_k) ($X = \{x_i\}, i = 1, \dots, n$).

Према Гаусу, параметри β_i функције $f(X; \beta_i)$ се могу добити минимизовањем суме квадрата резидуа (остатака) дефинисаних као разлика између предвиђене вредности функције $f(X; \beta_i)$ и мерене вредности y_k :



Слика 1.4. Расипање резултата мерења око најбоље праве.

$$r_k = y_k - f(X_k; \beta_i).$$

Минимизација се изводи на следећи начин:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_i} = \frac{\partial}{\partial \beta_i} \sum_k (y_k - f(X_k; \beta_i))^2 \text{ за } i = 1, \dots, n.$$

У случају линеарне функције, ако имамо сет од K уређених парова (x_k, y_k) параметре линеарне зависности a и b добијамо решавањем система једначина:

$$\Sigma: \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \sum_k (y_k - (a \cdot x_k + b))^2 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \sum_k (y_k - (a \cdot x_k + b))^2 \end{cases}$$

Према наведеној процедури, за вредности a и b добија се:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (1.22)$$

и

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (1.23)$$

Добијена линеарна зависност назива се **линија регресије** у односу на x . Треба приметити да је зависност x од y исто праволинијска, али да ове две регресионе линије нису исте. Несигурности одређених параметара a и b су дате следећим изразима:

$$s_a = s_{y/x} \sqrt{\frac{n}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}} \quad (1.24)$$

и

$$s_b = s_{y/x} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}} \quad (1.25)$$

где је:

$$s_{y/x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2}{n - 2}} \quad (1.26)$$

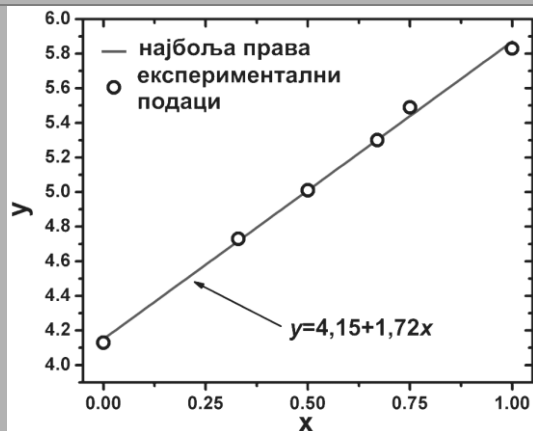
На описани начин могуће је одредити величине које не можемо директно мерити, а јављају се у функционалној зависности две величине лако доступне мерењу. Као пример можемо навести мерење моларног апсорпционог коефицијента ϵ применом Ламбер-Беровог закона. Ово (параметарско) мерење заснива се на одређивању нагиба зависности апсорбанције A од концентрације стандардног раствора супстанције чији моларни апсорпциони коефицијент желимо да одредимо.

Пример 1.7.

Ако су парови две мерене величине x и y дати са (1,00; 5,83), (0,75; 5,49), (0,67; 5,30), (0,50; 5,01), (0,33; 4,73) и (0,00; 4,13) одредити параметре линеарне зависности y од x .

| мерење | x | y | xy | x^2 | y^2 |
|----------|------|-------|---------|--------|----------|
| 1 | 1,00 | 5,83 | 5,83 | 1 | 33,9889 |
| 2 | 0,75 | 5,49 | 4,1175 | 0,5625 | 30,1401 |
| 3 | 0,67 | 5,30 | 3,551 | 0,4489 | 28,09 |
| 4 | 0,50 | 5,01 | 2,505 | 0,25 | 25,1001 |
| 5 | 0,33 | 4,73 | 1,5609 | 0,1089 | 22,3729 |
| 6 | 0,00 | 4,13 | 0 | 0 | 17,0569 |
| Σ | 3,25 | 30,49 | 17,5644 | 2,3703 | 156,7489 |

Применом једначина (1.22) и (1.23) за коефицијент правца се добија $a = 1,72$ док је одсечак на ординати $b = 4,15$.



Слика 1.5. Експериментални подаци за две директно мерене величине и провучена најбоља права применом методе најмњих квадрата.

1.8. Представљање експерименталних резултата-бројеви

На више места у овом поглављу било је речи о томе како се представља коначан резултат експеримента. Овде ће бити речи о томе колико цифара је потребно задржати у резултату и на који начин извршити заокруживање. Прва могућност је да се несигурност заокружује на једну значајну цифру и то увек на **veћу**, а након тога се процењена средња вредност (на даље резултат у ужем смислу) заокружује према општим правилима о заокруживању бројева. Неки аутори сматрају да се на овај начин непотребно повећава интервал поузданости, поготово ако се уложи велики напор да се израчуна. Друга могућност је да се несигурност заокружује према правилима заокруживања бројева на две значаје цифре, а након тога се резултат у ужем смислу заокружује тако да је последња значајна цифра на истом цифарском месту као и друга значајна цифра несигурности. Треба напоменути да коришћење више од две цифре у несигурности код мерења која се врше у највећем броју светских лабораторија једноставно нема смисла, што се може показати једноставним математичким разматрањем.

Код процењивања несигурности треба користити бар једну цифру више него што ће бити представљено у коначном резултату, а заокруживање се врши тек када се добије коначан резултат. На овај

начин спречава се агломерисање грешака и губитак на квалитету резултата.

Пример 1.8.

а) Према датим правилима заокруживања резултата и несигурности, несигурност мерења масе из примера 1.4. за коју је рачунски добијено $u(m) = 0,000125$ g заокружујемо на 0,0002 g, а након тога средњу вредност мерене масе (3,25938 g) на 3,2594 g. Коначан резултат пишемо као: $m = (3,2594 \pm 0,0002)$ g.

б) Процењену несигурност индиректно мерене величине A из примера 1.6 заокружујемо на следећи начин:

линеарно пропагирање: $4,48 \rightarrow 5$

пропагирање по квадратурама: $3,62 \rightarrow 4$

С обзиром да је несигурност процењена на цифру јединица резултат израчунавања A (1465,65) заокружујемо према правилима заокруживања бројева на 1466. Коначан резултат пишемо као: $A = 1466 \pm 5$ или $A = 1466 \pm 4$. За који начин пропагирања несигурности ћемо да се одлучимо зависи од конкретног случаја и ранијег искуства.

1.9. Представљање експерименталних резултата-табеле и графици

Два прегледна начина за представљање резултата мерења су табеле и графици. У табелама могу да се нађу сви резултати уређени на одговарајући начин у колоне или редове. Први ред (колоне) табеле резервисана је за опис величина које се налазе у колонама (редовима). У ова поља потребно је унети назив или ознаку мерене величине и јединице у којима се изражава. Погодна форма за ово је: **величина (јединица)** или **величина / јединица**. Правило је да се вертикалне линије у табелама не цртају, док се појединачни редови могу одвајати хоризонталним линијама. Аутор табеле може потенцијалном читаоцу додатно олакшати тако што сваку другу врсту колоне обоји као водиљу за око. У овом случају довољно је хоризонталном линијом одвојити само прву врсту табеле.

Док се из табеле може уочити општи тренд добијених резултата, праву слику трендова и зависности међу добијеним

результатима даје тек график, ако се нацрта на правилан начин. У овоме може да помогне велики број софтвера о чему ће бити речи касније. При цртању графика треба водити рачуна да се њиме покрије највећи могући део расположивог простора, а тачке које се уцртавају треба јасно да се означе одговарајућим симболом као на пример: ●, ▲, ■, ○. Процењене несигурности појединачних резултата треба јасно да се истакну на графику уколико је њихова величина довољна да се на коришћеној скали уоче. Осе графика морају јасно и недвосмислено да се назначе. Сваки график и табелу мора да прати одговарајуће текстуално објашњење онога што је представљено. При томе се код табела пропратни текст даје изнад, а код графика испод истих.

2. ГУСТИНА ТЕЧНОСТИ

У овом поглављу биће речи о томе шта је густина течности, зависности густине течности од температуре и на који начин се густина експерименталним путем може одређивати.

2.1. Основни појмови

Густина течности (апсолутна) дефинише се као маса јединице запремине:

$$\rho_{4^{\circ}}^{t^{\circ}} = \frac{m}{V}. \quad (2.1)$$

У изразу (2.1) m означава масу, а V запремину течности. Димензије густине су ML^{-3} , а у SI систему јединица је килограм по кубном метру, kgm^{-3} . Користи се и јединица kgL^{-1} као и gcm^{-3} . Јединица за густину нема посебну ознаку у систему SI јединица и формално није физичка јединица, мада се колоквијално тако означава. Апсолутна густина воде на температури од $4^{\circ}C$ има јединичну вредност: $\rho_{4^{\circ}, H_2O}^{4^{\circ}} = 1,0000 gcm^{-3}$.

Релативна густина течности се дефинише као густина течности на одређеној температури у односу на густину воде на тој истој температури. Другим речима, то је број који показује колико је пута маса неке течности већа од исте масе воде. Обележава се са $\rho_{t^{\circ}}^{t^{\circ}}$ или $d_{t^{\circ}}^{t^{\circ}}$. Како густина и релативна густина зависе од температуре, то суперскрипт ($\rho^{t^{\circ}}$) означава температуру на којој је извршено мерење густине узорка, а супскрипт ($\rho_{t^{\circ}}$) температуру стандардне супстанције. Релативна густина је неименован број и нема јединице. Према изразу (2.1), релативну густину можемо изразити као однос масе дате запремине испитиване течности, m_t и масе исте запремине воде, m_{H_2O} на истој температури:

$$\rho_{t^{\circ}}^{t^{\circ}} = \frac{\frac{m_t}{V}}{\frac{m_{H_2O}}{V}} = \frac{m_t}{m_{H_2O}}. \quad (2.2)$$

На основу овог израза можемо извести и израз за апсолутну густину течности на следећи начин: запремину V у изразу (2.2) можемо одредити из односа масе воде, m_{H_2O} и њене густине на истој температури $\rho_{4^\circ, H_2O}^{r^\circ}$ (таблични податак):

$$V = \frac{m_{H_2O}}{\rho_{4^\circ, H_2O}^{r^\circ}}. \quad (2.3)$$

Апсолутна густина течности је сада дата изразом:

$$\rho_{4^\circ}^{r^\circ} = \frac{m_t}{m_{H_2O}} = \frac{m_t}{m_{H_2O}} \cdot \rho_{4^\circ, H_2O}^{r^\circ}. \quad (2.4)$$

2.2. Утицај температуре на густину течности

Густина течности је карактеристична константа, али пошто зависи од температуре, наводи се заједно са температуром на којој је одређена.

Већина супстанција има позитиван запремински коефицијент ширења. То значи да им се запремина повећава са температуром, док се густина смањује са температуром, односно густина је обрнуто сразмерна температури: $\rho \propto 1/T$. Мали број супстанција (као на пример вода до 4°C) има негативан запремински коефицијент ширења. У овом случају густина је сразмерна температури: $\rho \propto T$. У табели 2.1 дате су вредности апсолутних густина неких течности на температури 22°C .

Табела 2.1. Густине појединих течности на 22°C .

| Супстанција | $\rho_{4^\circ}^{22^\circ}$ [kgm^{-3}] |
|-------------------|---------------------------------------------------|
| ацетон | 790 |
| етилалкохол | 790 |
| метилалкохол | 790 |
| бензен | 880 |
| бензин | 700 |
| крв (људска) | 1050 |
| азотна киселина | 1410 |
| сумпорна киселина | 1840 |
| сона киселина | 1190 |
| нафта | 810 |
| маслиново уље | 920 |
| рицинусово уље | 950 |
| жива | 13546 |
| толуен | 870 |
| вода | 998 |

2.3. Експериментални део – одређивање густине течности

Густину течности можемо одредити:

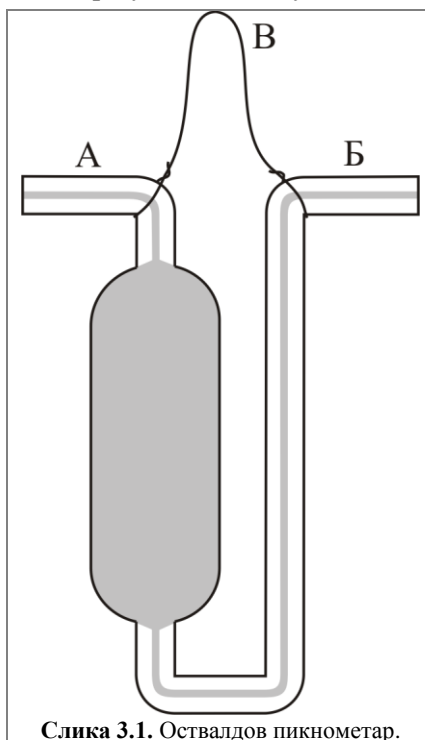
- 1) мерењем масе течности одређене запремине:
 - пикнометром.
- 2) и применом Архимедовог закона, односно одређивањем силе потиска која делује на тело потопљено у испитивану течност, и то:
 - ареометром и
 - Мор-Вестфаловом вагом.

2.3.1. Пикнометар

Пикнометром се одређује релативна густина испитиване течности. Постоје пикнометри различитих облика, али се најчешће употребљава Оствалдов пикнометар, приказан на слици 3.1. То је стаклена посуда тачно одређене запремине од 5-10 ml са капиларним изводима А и Б помоћу којих се пикнометар пуни течношћу.

Поступак мерења густине пикнометром састоји се из следећег: на почетку се измери маса празног, чистог и сувог пикнометра заједно са жичицом В којом се пикнометар качи на тас аналитичке ваге. Масу празног пикнометра обележићемо са m_p .

Затим се пикнометар пуни водом тако што се његов крај А преко танког црева повеже на вакуум шмрк, док се други крај Б урони у суд са водом. Треба водити рачуна да вода, а касније испитивана течност, испуњавају пикнометар до краја обе капиларе, А и Б. Тако напуњен пикнометар се стави у термостат да стоји 20 минута. Термостатиран пикнометар са водом се затим извади и пажљиво



Слика 3.1. Оствалдов пикнометар.

обрише, водећи рачуна да се не додирује рукама (све време се држи за жичицу В, како се не би испрљао или загрејао), и окачи на тас аналитичке ваге. Измерена маса пикнометра са водом је m_{p+H_2O} . Из разлике маса пикнометра са водом и празног пикнометра одређује се маса воде која се налази у пикнометру:

$$m_{H_2O} = m_{p+H_2O} - m_p. \quad (3.5)$$

Овако напуњен пикнометар на датој температури, има тачно одређену запремину. Пикнометар се затим испразни, осуши и напуни течношћу чију густину желимо да одредимо. Затим се термостатира, осуши и измери му се маса на исти начин на који је измерена маса пикнометра са водом. Маса пикнометра са испитиваном течношћу је m_{p+x} , а маса испитиване течности у пикнометру:

$$m_x = m_{p+x} - m_p. \quad (3.6)$$

Пошто се пикнометар у оба случаја налазио на истој радној температури, запремина пикнометра је иста када је напуњен испитиваном течношћу и када је напуњен водом. Поступак одређивања релативне густине испитиване течности $\rho_{t,x}^{t^\circ}$ заснива се на поређењу маса исте запремине V испитиване течности и воде:

$$\rho_{t,x}^{t^\circ} = \frac{\rho_{4^\circ,x}^{t^\circ}}{\rho_{4^\circ,H_2O}^{t^\circ}} = \frac{\frac{m_x}{V}}{\frac{m_{H_2O}}{V}} = \frac{m_x}{m_{H_2O}} \quad (3.7)$$

при чему су $\rho_{4^\circ,x}^{t^\circ}$ и $\rho_{4^\circ,H_2O}^{t^\circ}$ апсолутне густине испитиване течности и воде, редом. Апсолутну густину испитиване течности на радној температури можемо израчунати ако знамо апсолутну густину воде на тој температури, према једначини:

$$\rho_{4^\circ,x}^{t^\circ} = \frac{m_x}{m_{H_2O}} \rho_{4^\circ,H_2O}^{t^\circ} \quad (3.8)$$

2.3.1.1. Корекција густине на потисак ваздуха

Приликом одређивања густине пикнометром, потребно је извршити корекцију на потисак ваздуха, због чињенице да је, према Архимедовом закону, свако тело које је потопљено у неки флуид, привидно лакше за тежину њиме истиснутог флуида. Другим речима, услед потиска ваздуха, добијена вредност густине се разликује од стварне вредности. Стога је израз за густину течности (3.4) потребно кориговати на потисак ваздуха:

$$\rho_{4^{\circ},kor}^{f^{\circ}} = \frac{m_x}{m_{H_2O}} \rho_{4^{\circ},H_2O}^{f^{\circ}} + \frac{m_x - m_{H_2O}}{m_{H_2O}} \rho_{4^{\circ},v}^{f^{\circ}} \quad (3.11)$$

где је са $\rho_{4^{\circ},v}^{f^{\circ}}$ означена густина ваздуха. Вредност за густину ваздуха читава се из таблица на температури на којој се врши мерење.

2.3.1.2. Корекција густине на ширење стакла

Приликом мерења масе пикнометра са водом и са испитиваном течношћу, чију густину желимо да одредимо, може се десити да температура пикнометра са водом није иста као температура пикнометра са испитиваном течношћу. Стаклени пикнометар при промени температуре трпи промену своје запремине, чиме се мења и запремина испитиване течности. У том случају је поред корекције на потисак ваздуха, потребно извршити и корекцију на запремину (ширења или скупљања) услед промене температуре пикнометра, према следећем изразу:

$$\rho_{4^{\circ},kor}^{f^{\circ}} = \frac{m_x}{m_{H_2O}} \rho_{4^{\circ},H_2O}^{f^{\circ}} + \frac{m_x - m_{H_2O}}{m_{H_2O}} \rho_{4^{\circ},v}^{f^{\circ}} + \frac{m_x}{m_{H_2O}} \rho_{4^{\circ},H_2O}^{f^{\circ}} \cdot 0,000024(\theta_{H_2O} - \theta_x) \quad (3.12)$$

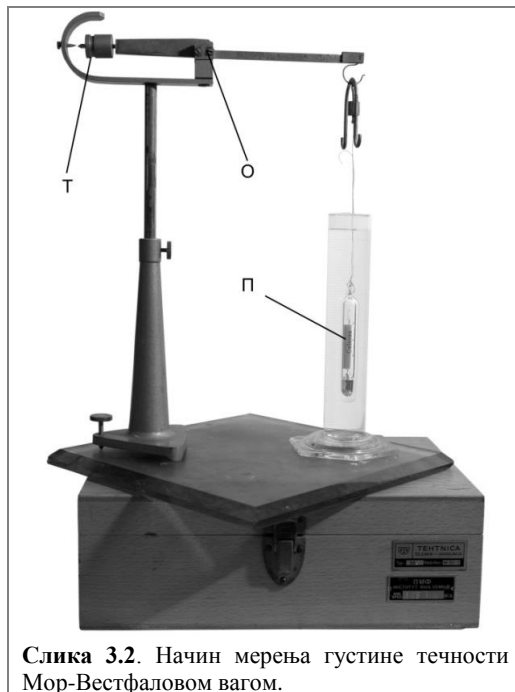
где број 0,000024 представља коефицијент запреминског ширења стакла, док се θ_{H_2O} и θ_x односе на температуру воде и испитиване течности, редом.

2.3.2. Мор – Вестфалова вага

Мор-Вестфаловом вагом (слика 3.2) се директно мери релативна густина испитиване течности. Ова вага представља полуку која се ослања на челичну призму у тачки О, са крацима који не морају бити исте дужине. Један крак полуке има скалу са десет једнаких подеока, а на десетом подеоку ове скале стоји окачено стаклено тело у коме се налази термометар (пловак П). На другом краку полуке налази се против-тег Т. Поред против-тега са исте стране полуке, налазе се два шиљка. Ови шиљци су индикатори равнотеже и када се налазе један наспрам другог, вага је у стању равнотеже. На краку полуке на коме се налази скала са десет подеока стављају се тегови у облику **јахача**. При мерењу Мор-Вестфаловом вагом, није битна маса јахача, већ однос њихових маса: 1: 0,1: 0,01: 0,001.

Пре почетка мерења релативне густине потребно је уравнотежити вагу. То се постиже тако што се пловак П цео урони у мензурну напуњену водом водећи рачуна да не додирује зидове мензуре, а затим се на десети подеок скале постави највећи, јединични јахач. Овај јахач је конструисан тако да му је тежина једнака сили потиска која делује на пловак П када се он налази у води чија је температура 20 °С. Коначно, вага се доводи у равнотежу финим померањем тега Т тако да шиљци (индикатори равнотеже) стоје један наспрам другог. Због поменуте зависности густине од температуре, температуру воде је потребно прочитати у мензури.

Сада се пажљиво, водећи рачуна да се вага и тег Т не помере, пловак П извади из воде, осуши и урони у претходно испрану



Слика 3.2. Начин мерења густине течности Мор-Вестфаловом вагом.

мензур, напуњену течносту чију густину одређујемо (на исту дубину на којој је био у води). Затим се распоређивањем осталих јахача на подеоке скале врши уравнотежавање ваге. У зависности од густине испитиване течности разликујемо два случаја:

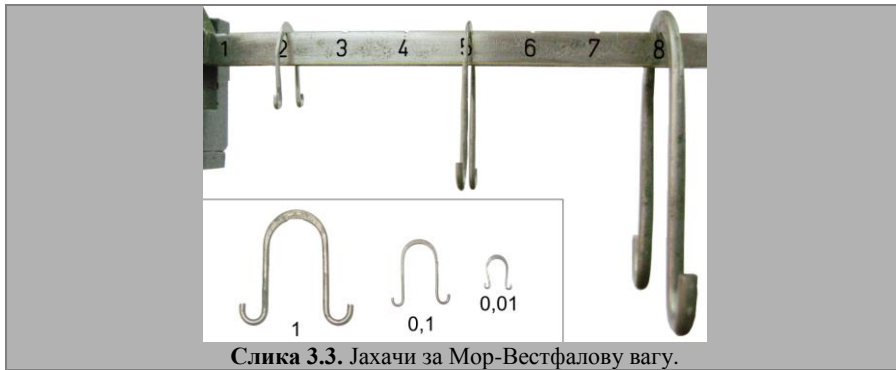
1) уколико је густина испитиване течности мања од густине воде, јединични тег се помера са десетог подеока (на који је стављен уравнотежавањем ваге у води) на неки од мањих подеока, у положај који одговара приближном равнотежном стању ваге. Потпуно уравнотежавање ваге постиже се употребом мањих јахача, поступно од већих ка мањим.

Јединични јахач на десетом подеоку има вредност 1, ако се налази на деветом подеоку има вредност 0,9, на осмом подеоку има вредност 0,8 и тако редом до првог подеока на коме има вредност 0,1. Вредност следећег мањег јахача на десетом подеоку је 0,1, на деветом подеоку 0,09 и тако редом до првог подеока на коме има вредност 0,01.

2) уколико је густина испитиване течности већа од густине воде, равнотежа се успоставља на исти начин као и у претходном случају, са том разликом да јединични јахач којим је вага уравнотежена када је пловак у води, остаје на десетом подеоку. Ако замислимо да се на слици 3.3. налази још један јединични јахач на десетом подеоку, густина течности записује се на следећи начин: 1,852.

Пример 2.1. Очитавање релативне густине из распореда тегова на Мор-Вестфаловој ваги

- Највећи јахач налази се на осмом подеоку, што записујемо као 0,8__ (имајући у виду да је густина испитиване течности мања од густине воде).
- Следећи јахач се налази на петом подеоку значи 0,5__, што можемо записати као 0,85__ (имајући у виду однос маса јахача од највећег ка мањим: 1:0,1...).
- Последњи јахач се налази на другом подеоку, 0,__2, и пишемо вредност густине течности: 0,852.

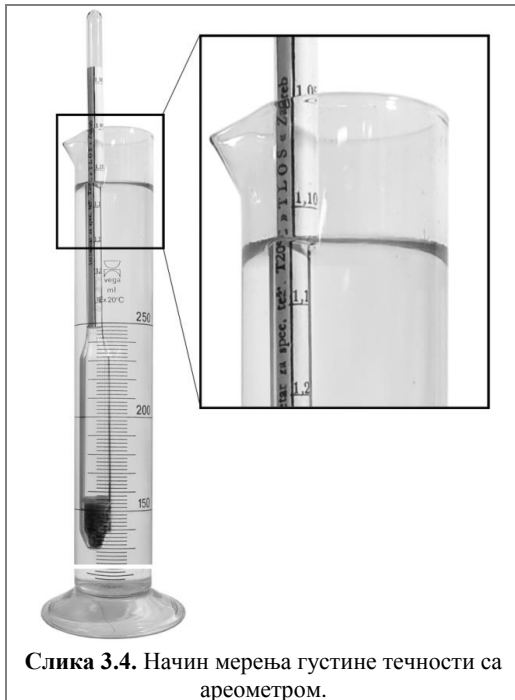


Слика 3.3. Јахачи за Мор-Вестфалову вагу.

Мор-Вестфаловом вагом се може одредити и апсолутна густина испитиване течности на тај начин што се добијена вредност релативне густине помножи апсолутном густином воде на температури на којој је одређена релативна густина течности. Вредности густине воде на различитим температурама дате су у табlici на крају практикума.

2.3.3. Ареометар

Ареометар је справа којом се директно мери апсолутна густина течности. Проналазак ареометра се приписује Хипати, грчкој философињи и математичарки која је живела у IV веку наше ере. Конструкција ареометра је заснована на законима равнотеже у хидростатици.



Слика 3.4. Начин мерења густине течности са ареометром.

Ареометар је затворена стаклена цев, проширена у основи, слика 3.4. У проширеном делу се налазе оловне куглице или жива, које омогућавају ареометру да вертикално плива у испитиваној течности. Горњи, ужи део ареометра је константног пресека и садржи скалу, обележену јединицама за густину.

При мерењу, ареометар се лагано пусти да плива у течности чија се густина мери, водећи рачуна да ареометар не додирује зидове суда у ком се налази испитивана течност. У зависности од

густине течности ареометар тоне док се не успостави равнотежа између силе потиска, која представља тежину течности истиснуте уроњеним делом ареометра и тежине ареометра.

Што је густина испитиване течности већа, ареометар у њој мање тоне и обрнуто, у течности мање густине ареометар тоне дубље. Густина течности се директно читава са скале ареометра и одговара подеоку који се поклапа са нивоом испитиване течности. Очитана вредност је најтачнија када се мерење врши на температури која је убележена на скали ареометра.

Сила потиска делује на тела која се налазе у неком флуиду (гасу или течности) и може се представити у складу са дефиницијом:

$$F = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g \quad (3.13)$$

где је m маса истиснутог флуида, ρ густина флуида, а V запремина тела која је једнака запремини истиснутог флуида.

Упоредивши све три методе за одређивање густине течности, може се закључити да је за одређивање густине пикнометром потребно мање течности него код одређивања ареометром и Мор-

Вестфаловом вагом. Такође, прецизност ове методе даје јој предност у односу на преостале две.

2.4. Задаци

1. Сила потиска на неко тело уроњено у воду на температури $\theta = 4$ °C износи 6,5 N. Одредити колики ће бити потисак на исто тело у алкохолу (ROH) густине 785 kgm^{-3} и у живи (Hg) чија је густина 13600 kgm^{-3} . На температури 4 °C, вода има јединичну вредност густине.

Решење:

$$\theta = 4 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\rho_{4^\circ, H_2O}^{f^o} = 1 \text{ gcm}^{-3} = 1000 \text{ kgm}^{-3}$$

$$F_{H_2O} = 6,5 \text{ N}$$

$$\rho_{4^\circ, ROH}^{f^o} = 785 \text{ kgm}^{-3}$$

$$\rho_{4^\circ, Hg}^{f^o} = 13600 \text{ kgm}^{-3}$$

$$\boxed{F_{ROH}, F_{Hg} = ?}$$

$$F_{H_2O} = m_{H_2O} \cdot g = \rho_{4^\circ, H_2O}^{f^o} \cdot V \cdot g$$

$$V = \frac{F_{H_2O}}{\rho_{4^\circ, H_2O}^{f^o} \cdot g} = \frac{6,5 \text{ N}}{1000 \text{ kgm}^{-3} \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2}} = 6,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$F_{ROH} = \rho_{4^\circ, ROH}^{f^o} \cdot g \cdot V = 785 \text{ kgm}^{-3} \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2} \cdot 6,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 5,08 \text{ N}$$

$$F_{Hg} = \rho_{4^\circ, ROH}^{f^o} \cdot g \cdot V = 13600 \text{ kgm}^{-3} \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2} \cdot 6,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 88,05 \text{ N}$$

2. У суду се налазе вода и жива, једна изнад друге. У суд се унесе челична куглица. Одредити колики део запремине челичне куглице ће бити у води. Густина воде је 1 gcm^{-3} , живе 13600 kgm^{-3} , а челика $7,7 \text{ gcm}^{-3}$.

Решење:

$$\rho_{4^{\circ}, H_2O}^{f^{\circ}} = 1 \text{ gcm}^{-3} = 1000 \text{ kgm}^{-3}$$

$$\rho_{4^{\circ}, Hg}^{f^{\circ}} = 13600 \text{ kgm}^{-3}$$

$$\rho_{4^{\circ}, \text{čelika}}^{f^{\circ}} = 7,7 \text{ gcm}^{-3} = 7700 \text{ kgm}^{-3}$$

$$\frac{V_1}{V} = ?$$

V - укупна запремина куглице

V_1 - запремина дела куглице који се налази у води

F - сила Земљине теже

$F_{p,1}$ - сила потиска воде

$F_{p,2}$ - сила потиска живе

$$F = F_{p,1} + F_{p,2}$$

$$\rho_{4^{\circ}, \text{čelika}}^{f^{\circ}} Vg = \rho_{4^{\circ}, H_2O}^{f^{\circ}} V_1g + \rho_{4^{\circ}, Hg}^{f^{\circ}} (V - V_1)g$$

$$V_1(\rho_{4^{\circ}, Hg}^{f^{\circ}} - \rho_{4^{\circ}, H_2O}^{f^{\circ}})g = V(\rho_{4^{\circ}, Hg}^{f^{\circ}} - \rho_{4^{\circ}, \text{čelika}}^{f^{\circ}})g$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\rho_{4^{\circ}, Hg}^{f^{\circ}} - \rho_{4^{\circ}, \text{čelika}}^{f^{\circ}}}{\rho_{4^{\circ}, Hg}^{f^{\circ}} - \rho_{4^{\circ}, H_2O}^{f^{\circ}}} = \frac{13600 \text{ kgm}^{-3} - 7700 \text{ kgm}^{-3}}{13600 \text{ kgm}^{-3} - 1000 \text{ kgm}^{-3}}$$

$$\frac{V_1}{V} = 0,47$$

3. Одредити апсолутну и релативну густину течности (без корекције на потисак ваздуха) ако је мерена пикнометром на температури од 22°C , при чему су мерењима на аналитичкој ваги добијени следећи подаци:

маса пикнометра, $m_p = 5,2327 \text{ g}$

маса пикнометра са водом, $m_{p+H_2O} = 15,2367 \text{ g}$

маса пикнометра са супстанцијом, $m_{p+x} = 15,2487 \text{ g}$

густина воде на $\theta = 22^{\circ}\text{C}$, $\rho_{4^{\circ}, H_2O}^{22^{\circ}} = 0,9978 \text{ gcm}^{-3}$ (таблични податак)

Апсолутну густину изразити и у SI јединицама и резултат приказати са назначеном апсолутном грешком. Апсолутна грешка мерења масе на аналитичкој ваги је, $\Delta m = \pm 0,0001 \text{ g}$.

Решење:

$$m_p = (5,2327 \pm 0,0001) \text{ g}$$

$$m_{p+H_2O} = (15,2367 \pm 0,0001) \text{ g}$$

$$m_{p+x} = (15,2487 \pm 0,0001) \text{ g}$$

$$\rho_{4^\circ, H_2O}^{22^\circ} = (0,99780 \pm 0,00005) \text{ gcm}^{-3}$$

$$\rho_{4^\circ, x}^{22^\circ}, \rho_{22^\circ, x}^{22^\circ} = ?$$

$$\rho_{4^\circ, x}^{22^\circ} = \rho_{22^\circ, x}^{22^\circ} \cdot \rho_{4^\circ, H_2O}^{22^\circ} = \frac{m_{p+x} - m_p}{m_{p+H_2O} - m_p} \rho_{4^\circ, H_2O}^{22^\circ}$$

$$\rho_{4^\circ, x}^{22^\circ} = 0,998997 \text{ gcm}^{-3}$$

$$\rho_{22^\circ, x}^{22^\circ} = 1,0011995$$

$$\ln \rho_{4^\circ, x}^{22^\circ} = \ln(m_{p+x} - m_p) - \ln(m_{p+H_2O} - m_p) + \ln \rho_{4^\circ, H_2O}^{22^\circ}$$

$$\frac{\Delta \rho_{4^\circ, x}^{22^\circ}}{\rho_{4^\circ, x}^{22^\circ}} = \frac{\Delta m_{p+x} + \Delta m_p}{m_{p+x} - m_p} + \frac{\Delta m_{p+H_2O} + \Delta m_p}{m_{p+H_2O} - m_p} + \frac{\Delta \rho_{4^\circ, H_2O}^{22^\circ}}{\rho_{4^\circ, H_2O}^{22^\circ}} =$$

$$= 9,007 \cdot 10^{-5}$$

$$\Delta \rho_{4^\circ, x}^{22^\circ} = 9,007 \cdot 10^{-5} \cdot 0,998997 \text{ gcm}^{-3} = 8,99 \cdot 10^{-5} \text{ gcm}^{-3} \approx 9 \cdot 10^{-5} \text{ gcm}^{-3}$$

$$\frac{\Delta \rho_{22^\circ, x}^{22^\circ}}{\rho_{22^\circ, x}^{22^\circ}} = \frac{\Delta m_{p+x} + \Delta m_p}{m_{p+x} - m_p} + \frac{\Delta m_{p+H_2O} + \Delta m_p}{m_{p+H_2O} - m_p} = 3,996 \cdot 10^{-5}$$

$$\Delta \rho_{22^\circ, x}^{22^\circ} = 3,996 \cdot 10^{-5} \cdot 1,0011995 = 4,0007 \cdot 10^{-5} \leq 5 \cdot 10^{-5}$$

$$\rho_{4^\circ, x}^{22^\circ} = (0,99900 \pm 0,00009) \text{ gcm}^{-3} \text{ (у СИ јединицама: } \rho_{4^\circ, x}^{22^\circ} = (0,99900 \pm 0,00009) \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}), \rho_{22^\circ, x}^{22^\circ} = (1,00120 \pm 0,00005)$$

4. Маса празног пикнометра износи А грама. Када се пикнометар напуни водом, његова маса је В грама. Ако се у пикнометар унесе С грама опиљака челика и допуни водом, пикнометар има масу D грама. Одредити густину челичних опиљака.

Решење:

$$m_p = A$$

$$m_{p+H_2O} = B$$

$$m_{\check{c}el} = C$$

$$m_{p+H_2O+\check{c}el} = D$$

$V_{\check{c}el}$ запремина челичних опилџака,

V_p укупна запремина пикнометра,

$$\boxed{\rho_{4^\circ, \check{c}el}^{t^\circ} = ?}$$

$$V_p = \frac{m_{H_2O}}{\rho_{4^\circ, H_2O}^{t^\circ}} = \frac{B - A}{\rho_{4^\circ, H_2O}^{t^\circ}}$$

$$V_{H_2O} = \frac{D - (A + C)}{\rho_{4^\circ, H_2O}^{t^\circ}}$$

$$V_{\check{c}el} = V_p - V_{H_2O} = \frac{B - A}{\rho_{4^\circ, H_2O}^{t^\circ}} - \frac{D - (A + C)}{\rho_{4^\circ, H_2O}^{t^\circ}} = \frac{B + C - D}{\rho_{4^\circ, H_2O}^{t^\circ}}$$

$$\rho_{4^\circ, \check{c}el}^{t^\circ} = \frac{m_{\check{c}el}}{V_{\check{c}el}} = \frac{C}{B + C - D} \cdot \rho_{4^\circ, H_2O}^{t^\circ}$$

3. ОПТИЧКА АКТИВНОСТ

3.1. Опште о светлости

Светлосно зрачење је по природи електромагнетно. Електромагнетно (ЕМ) зрачење представља трансверзалне таласе сачињене од електричног \vec{E} и магнетног \vec{B} поља који су међусобно нормални и индукују једно друго простирући се на тај начин кроз средину. Као и сваки талас, електромагнетно зрачење се одликује таласном дужином λ , фреквенцијом ν и брзином c . Ове три величине су повезане преко израза:

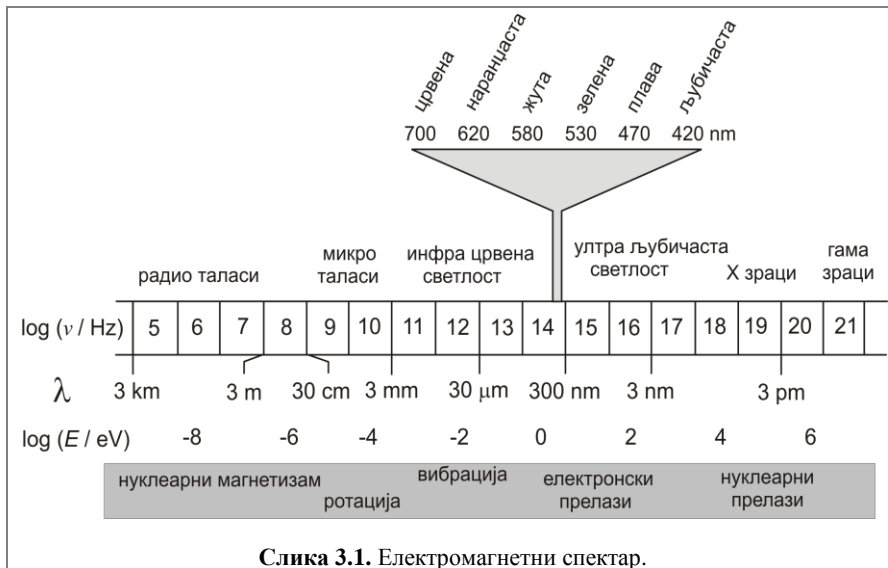
$$c = \lambda \cdot \nu . \quad (3.1)$$

Поред тога, двојна природа светлости нам омогућава да светлосни зрак представљамо скупом честица - фотона, при чему је енергија једног фотона према Планку дата са:

$$E = h \cdot \nu . \quad (3.2)$$

Ако електромагнетно зрачење уредимо по таласним дужинама, фреквенцијама или енергијама добијамо **електромагнетни спектар** (слика 3.1).

Полихроматску или **белу светлост** чини скуп таласа различитих таласних дужина. **Монохроматску светлост** чини скуп таласа исте таласне дужине. **Линеарно поларизован светлосни талас** је онај талас код кога вектор електричног поља осцилује увек у једној равни, то јест дуж једног истог правца. У том случају, раван у којој осцилује вектор \vec{E} назива се **раван поларизације**, док у равни која је нормална на раван поларизације осцилује вектор \vec{B} . Процес којим се неполаризована светлост преводи у поларизовану, зове се **поларизација**. Поларизована светлост настаје, на пример, преламањем природне светлости кроз систем кристала са специјално обрађеним површинама. Природна светлост се састоји од великог броја таласа, чији су вектори електричног односно магнетног поља подједнако оријентисани у свим правцима и она је неполаризована и полихроматска.



3.2. Оптички активне супстанције

За супстанције које имају способност да обрћу раван пропуштене поларизоване светлости за изврстан угао, кажемо да су **оптички активне**. Ова појава се назива **оптичка ротација**. Гледајући у смеру простирања зрака, супстанције које имају способност да обрћу раван поларизоване светлости у лево (у смеру супротном од казаљке на сату), имају леву или негативну ротацију и за њих кажемо да су **леворотаторни** ((-)-енантиомери). За супстанције, које обрћу раван поларизоване светлости у десно (у смеру казаљке на сату) и имају десну или позитивну ротацију, кажемо да су **декстроротаторни** ((+)-енантиомери). У оптички активне супстанције спадају: кристални шећер, кварц, натријум-хлорат, терпентин, стрихнин-сулфат, као и раствори многих, пре свега, органских супстанција. Оптичка активност може бити узрокована:

1) посебном грађом молекула и представља својство супстанције које се испољава у свим физичким стањима и у раствору. Ту спадају једињења која имају један или више **асиметричних (хиралних) центара**, најчешће асиметричних угљеникових атома. То значи да је угљеников атом везан за четири различита атома или атомске групе. Поред угљеника и други елементи као што су: азот (N), сумпор (S), фосфор (P), кобалт (Co) и платина (Pt), могу створити један или више асиметричних (хиралних) центара у молекулу.

2) посебном грађом кристалне решетке (моноклиничне и триклиничне структуре) и представља својство супстанције у кристалном стању. Не јавља се када се супстанција налази у аморфном, течном или гасовитом стању. У ове супстанције спадају кварц, калијум-хлорат и турмалин.

3) посебном конформацијом молекула, као што је спирална код протеина, која је и потврђена на основу својствене моћи оптичке ротације.

Моћ оптичке ротације супстанције најчешће се изражава преко **специфичне ротације**, $[\alpha]_{\lambda}^t$ која представља угао ротације поларизоване светлости раствора јединичне концентрације и јединичне дужине стуба течности и која је дата изразом:

$$[\alpha]_{\lambda}^t = \frac{\alpha}{l \cdot c} \quad (3.3)$$

У горе наведеној једначини, α је угао ротације или обртања, односно угао за који оптички активна супстанција обрће раван поларизоване светлости и изражава се у радијанима, rad, или степенима $^{\circ}$, l је дужина оптичког пута изражена у dm, а c је масена концентрација оптички активне супстанције, изражена у gdm^{-3} или kgm^{-3} .

Специфична ротација $[\alpha]_{\lambda}^t$ зависи од природе супстанције, таласне дужине светлости и температуре раствора. SI јединица специфичне ротације је $\text{rad m}^2\text{kg}^{-1}$ или $^{\circ}\text{m}^2\text{kg}^{-1}$, али се у практичне сврхе често користи јединица $^{\circ}\text{dm}^2\text{g}^{-1}$.

Израз за специфичну ротацију може се модификовати уколико се концентрација изрази бројем грама растворене супстанције у 100 g раствора, што представља процентну концентрацију:

$$[\alpha]_{\lambda}^t = \frac{\alpha \cdot 100}{l \cdot c\%} \quad (3.4)$$

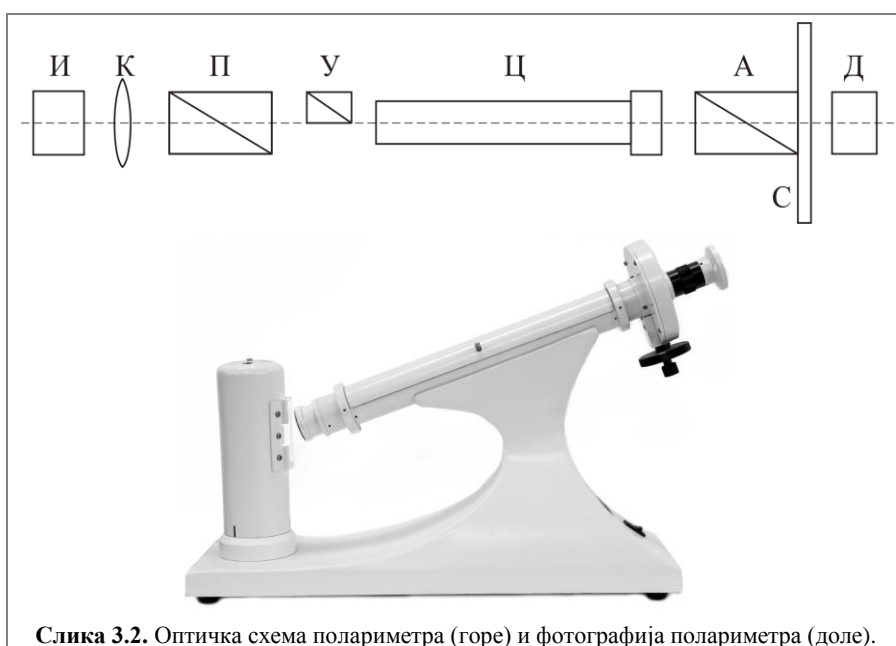
Поред специфичне ротације, може се дефинисати и **моларна ротација** која је дата изразом:

$$[\alpha_M]_{\lambda}^t = [\alpha]_{\lambda}^t \cdot M \quad (3.5)$$

где је M моларна маса оптички активне супстанције. Јединица за моларну ротацију у SI систему је $\text{rad m}^2\text{mol}^{-1}$.

3.3. Полариметрија

Полариметријска одређивања се заснивају на зависности угла обртања равни линеарно поларизоване светлости од концентрације оптички активне супстанције. За мерење угла оптичке ротације, линеарно поларизоване монохроматске светлости, користе се оптички уређаји који се зову **полариметри** (слика 3.2). Основни делови полариметра су: извор монохроматске светлости И, колиматорско сочиво К, поларизатор П, уређај за добијање полусенке У, полариметарска цев Ц, анализатор А са кружном скалом С и детектор Д.



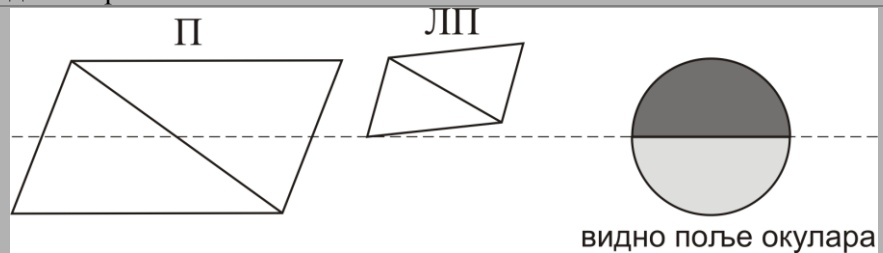
Слика 3.2. Оптичка схема полариметра (горе) и фотографија полариметра (доле).

Извор монохроматске светлости: као извори монохроматске светлости најчешће се користе натријумова (Na) или живина (Hg) лампа.

Поларизатор и анализатор: поларизатором се неполаризована светлост преводи у поларизовану. Како људско око не разликује неполаризовану од поларизоване светлости, за детектовање и анализу поларизоване светлости користи се призма слична поларизатору, која се зове **анализатор**. За поларизатор и

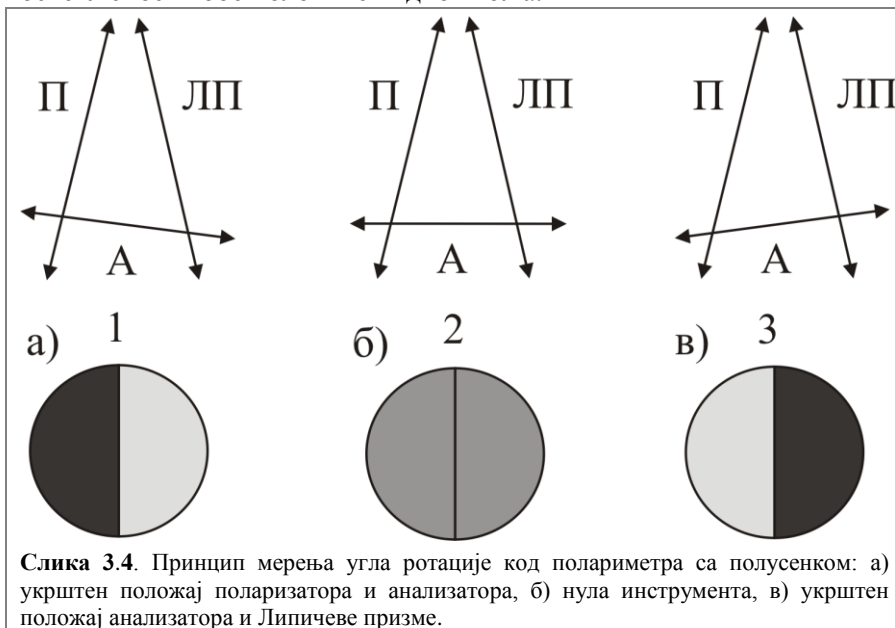
анализатор се користе Николове призме, које су израђене од специфичног кристала - исландског калцита. Исландски калцит разлаже светлост на два поларизована зрака чије су равни осциловања међусобно нормалне. Један зрак се кроз кристал простире у свим правцима истом брзином и назива се **редован** зрак. Други зрак се кроз кристал простире различитим брзинама у различитим правцима (има различите вредности индекса преламања) и назива се **нередован** зрак. Да би призма имала функцију поларизатора, потребно је уклонити редован зрак. То се постиже брушењем одређених равни кристала под одређеним углом, сечењем призме по дијагонали и лепљењем пререзаних површина кристала канада балзамом. Канада балзам је природна смола од чије се површине одбија редован зрак и апсорбује у тамном омотачу призме. Значи, за редован зрак индекс преламања призме је већи од индекса преламања слоја канада-балзама због чега се он тотално рефлектује о граничну површину призма - канада балзам. Код класичних полариметара поларизатор је непокретан, док се анализатор заједно са кружном скалом може окретати за 360° . Интензитет светлости се са обртањем анализатора стално мења. Највећи је када осе поларизатора и анализатора заклапају углове од 0° или 180° , а најмањи при угловима од 90° и 270° .

Уређај за добијање полусенке омогућава задовољавајућу прецизност при утврђивању укрштеног положаја поларизатора (П) и анализатора (А). Укрштен положај је онај положај у коме се оптичке осе призми налазе под правим углом. Обично се користи Липичева призма (ЛП) која представља малу призму која је тако постављена да њена оптичка оса са оптичком осом поларизатора заклапа угао од $1-7^\circ$ (слика 3.3). Најчешће се поставља тако да покрива половину видног поља. Дељењем видног поља на два дела, олакшава се процена њихове неједнаке осветљености људским оком као детектором.

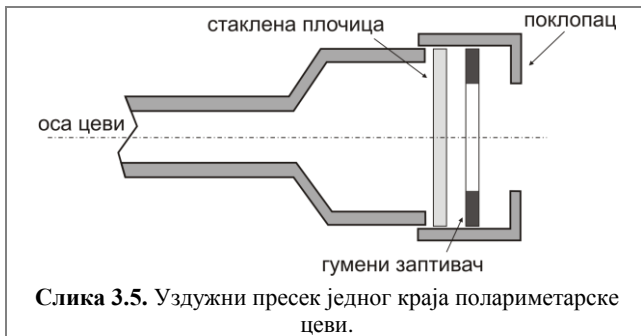


Слика 3.3. Добијање полусенке са Липичевом призмом.

Ако се анализатор обртањем постави у укрштен положај са поларизатором, половина видног поља у окулару коју не покрива Липичева призма биће тамнија, (слика 3.4.а) док је друга половина светла. Обрнута ситуација се добија ако се анализатор даље ротира за одређени угао и доведе у положај у коме заклапа прав угао са оптичком осом Липичеве призме (слика 3.4.в). Видно поље је сада измењено, односно део који је био светао сад је таман, а таман део постаје осветљен. Између ова два карактеристична положаја анализатора, налази се положај у коме су обе половине видног поља подједнако осветљене (слика 3.4.б). Овај положај представља нулу инструмента, под условом да се у полариметарској цеви налази супстанција која није оптички активна, као што је на пример вода. Ако се у полариметарској цеви налази оптички активна супстанција, угао ротације се читава са скале анализатора при једнакој осветљености обе половине видног поља.



Полариметарска цев представља цилиндричну цев у којој се налази раствор оптички активне супстанције (слика 3.5).



Слика 3.5. Уздужни пресек једног краја полариметарске цеви.

Најчешће се израђује од стакла или керамичког материјала и дужине је 10 или 20 cm (слика 5.14) Оса полариметарске цеви мора се поклапати са

осом полариметра. Веома је важно да се поклопац полариметарске цеви не затеже превише, јер долази до напрезања у стаклу које почиње двојно да прелама светлост. На овај начин се избегава уношење грешке у вредност измереног угла ротације оптички активне супстанције.

Кружна скала се налази у склопу анализатора и најчешће је подељена на степене, од 0-360°. Прецизност поделе, а тиме и мерење угла ротације зависи од квалитета полариметра. Код старијих генерација полариметара улогу **детектора** преузима људско око, док код савремених полариметара улогу детектора имају фотоелектричне ћелије, како би се избегла субјективност људског ока.

3.3.1. Принцип рада полариметра

Извор монохроматске светлости, И (слика 3.2), најчешће натријумова (Na) лампа, емитује моно-хроматски сноп светлости који пролази кроз коли-маторско сочиво. Улога овог сочива, које се налази испред поларизатора, је да усмерава светлост ка



Слика 3.6. Различити облици полариметарске цеви.

поларизатору у паралелним зрацима. Када поларизована светлост пролази кроз полариметарску цев у којој се налази супстанција која није оптички активна, поларизатор и анализатор се постављају у паралелан положај у коме им се оптичке осе поклапају.

Кружна скала се подеси на нулту вредност.

Обе половине видног поља у окулару су подједнако осветљене. Када се у полариметарску цев сипа раствор оптички активне супстанције, раван у којој вектор електричног поља линеарно поларизованог снопа светлости осцилује закреће за одређени угао у односу на положај оптичке осе анализатора пре уношења оптички активне супстанције.

Због тога до окулара долази поларизована светлост мањег интензитета, а видно поље у окулару је подељено на два дела која су различито осветљена. Да би се измерио угао ротације раствора који је у полариметарској цеви, потребно је окренути анализатор са кружном скалом за известан угао и довести га у положај у коме су обе половине видног поља подједнако осветљене. Овај угао на кружној скали представља угао оптичке ротације оптички активне супстанције, преко кога се, из једначине (3.3) може израчунати концентрација оптички активне супстанције.

3.3.2. Примена полариметријских мерења

Полариметријска одређивања имају велику примену у биолошкој и фармацеутској хемији, у квалитативној и квантитативној анализи оптички активних супстанција. Метода квалитативне полариметријске анализе се веома много користи у минерологији за испитивање и идентификацију минерала. Квантитативна полариметријска анализа има примену у индустрији хране, воћних сокова и шећера. У неким случајевима се мерењем оптичке ротације може пратити и кинетика одвијања процеса, на пример: инверзија сахарозе у воденом раствору у глукозу и фруктозу, у киселој средини.

3.4. Експериментални део - Одређивање специфичне ротације и концентрације оптички активне супстанције

На основу полариметријских мерења могуће је одредити концентрацију оптички активне супстанције, као и вредност њене специфичне ротације. Потребно је направити серију раствора оптички активне супстанције различитих концентрација. Пре мерења угла ротације оптички активне супстанције потребно је одредити нулу полариметра на начин описан у претходној вежби. По одређивању нуле инструмента, полариметарска цев се испразни, опере малом запремином раствора ($\sim 5 \text{ cm}^3$) најмање концентрације из серије раствора испитиване оптички активне супстанције. Затим

се полариметарска цев напуни овим раствором и мери се угао скретања равни поларизоване светлости, α најмање из три мерења и израчуна се средња вредност угла ротације. Потребно је извршити корекцију сваког измереног угла ротације у односу на нулу полариметра. Поступак се понови и за преостале растворе из серије.

На основу измерених вредности углова ротације припремљених раствора, чије су концентрације познате, црта се калибрациона (радна) крива, односно зависност $\alpha = f(c)$. Правилна калибрациона крива представља праву која, према изразу (3.3), полази из координатног почетка. Затим се полариметром измери угао ротације раствора испитиване оптички активне супстанције непознате концентрације, c_x . Са калибрационог дијаграма се за измерену вредност угла ротације очита њена вредност концентрације спуштањем нормале на апсцисну осу из тачке на калибрационој кривој која одговара вредности измереног угла ротације за ову концентрацију. Из нагиба калибрационе криве могуће је одредити вредност специфичне моћи ротације оптички активне супстанције коришћењем једначине (3.4), јер је дужина полариметарске цеви, односно оптичког пута позната. Поређењем добијене вредности специфичне моћи ротације са табличним вредностима специфичних моћи ротације, може се извршити њена идентификација.

3.5. Задаци

1. Израчунати угао специфичне ротације и изразити га у $^{\circ}\text{cm}^3\text{g}^{-1}\text{dm}^{-1}$:

а) 8,2 %-ног раствора који обрће раван поларизоване светлости за угао $22^{\circ}15'25''$ у полариметарској цеви дужине 200 mm,

б) раствора концентрације $0,82\text{ gcm}^{-3}$ који обрће раван поларизоване светлости за угао $22^{\circ}15'25''$ у полариметарској цеви дужине 200 mm.

Решење:

а) $c = 8,2\%$

$$\alpha = 22^{\circ}15'25'' = 22^{\circ} + \left(\frac{15}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{25}{3600}\right)^{\circ} = 22,257^{\circ}$$

$$l = 200\text{ mm} = 2\text{ dm}$$

$$\boxed{[\alpha]_D^{25} = ?}$$

$$[\alpha]_D^{25} = \frac{100\alpha}{lc} = \frac{100 \cdot 22,257^{\circ}}{2\text{ dm} \cdot 8,2\%} = 135,7^{\circ}\text{cm}^3\text{g}^{-1}\text{dm}^{-1}$$

$$\text{б) } c = 0,82 \text{ gcm}^{-3}$$

$$\alpha = 22^{\circ}15'25'' = 22^{\circ} + \left(\frac{15}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{25}{3600}\right)^{\circ} = 22,257^{\circ}$$

$$\underline{l = 200 \text{ mm} = 2 \text{ dm}}$$

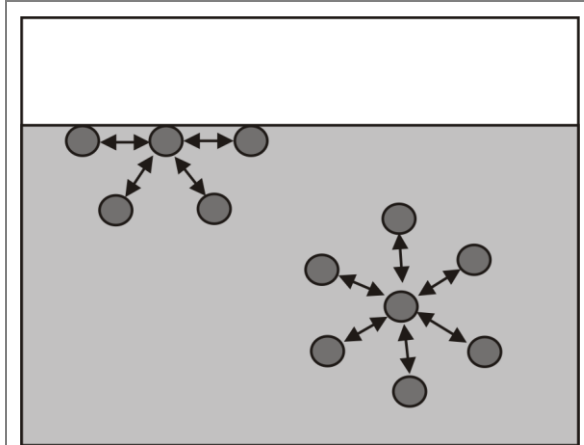
$$\boxed{[\alpha]_D^{25} = ?}$$

$$[\alpha]_D^{25} = \frac{\alpha}{lc} = \frac{22,257^{\circ}}{2 \text{ dm} \cdot 0,82 \text{ gcm}^{-3}} = 13,57^{\circ} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ dm}^{-1}$$

4. ПОЈАВЕ НА ГРАНИЦИ ФАЗА

4.1. Површински напон

Једна од карактеристичних особина течности, која се јавља као последица постојања некомпензованих међумолекулских сила на граници фаза, је **површински напон**. Наиме, молекули течности који се налазе у њеној унутрашњости, равномерно су окружени суседним молекулима течности, због чега је укупна



Слика 4.1. Схематски приказ дејства међумолекулских сила на молекул у унутрашњости течности и на површини.

(резултујућа) сила која делује на неки молекул течности једнака нули. Са друге стране, молекул који се налази на површини течности, окружен је са једне (доње) стране молекулима течности, а са друге (горње) молекулима паре, чија је густина, као и интензитет међумолекулских сила много мања него у течности. Због тога се јавља резултујућа сила која делује на молекуле на површини течности и усмерена је ка унутрашњости течности (слика 4.1). Као последица тога граница између течности и парне фазе је у стању напона и понаша се као затегнута мембрана, тежећи да смањи своју површину.

Површински напон, γ , се дефинише као сила која делује нормално на јединицу дужине на површини течности. Јединица површинског напона је N m^{-1} . Зависи од температуре и то на следећи начин: са порастом температуре површински напон опада и на критичној температури има нулту вредност.

4.1.1. Одређивање коефицијента површинског напона

Развијене су бројне методе за одређивање коефицијента површинског напона које се разликују по једноставности, тачности,

као и количини узорка неопходног за мерење. Ове методе се могу се поделити на **статичке и динамичке**. У статичке методе убрајамо оне код којих у току мерења не долази до обнављања површине течности, а зову се и **капиларне** методе. Код динамичких метода, површина течности се у току мерења обнавља. Неке од најчешће коришћених метода за одређивање коефицијента површинског напона течности су:

- 1) **метода мерења масе (или броја) капи течности - сталагмометријска метода** која је описана у експерименталном делу;
- 2) **метода капиларне цеви**, заснована на мерењу висине до које се подигне стуб течности у капилари уроњеној у испитивану течност;
- 3) **метода максималног притиска у мехуру** која се заснива на мерењу максималног притиска у мехуру гаса који се ствара на крају капиларе уроњене у течност кроз коју се продувава инертан гас;
- 4) **метода мерења димензија капи**, заснована на мерењу димензија капи која мирује на чврстој површини и
- 5) **метода прстена (плоче)** која се заснива на мерењу силе која је потребна да би се прстен или плоча познате површине одвојио/ла од површине течности.

4. 2. Експериментални део - Сталагмометријски метод одређивања коефицијента површинског напона

Сталагмометар је специјално обликована стаклена цев са проширеним делом у који се уноси течност, која се наставља у капилару заравњеног и добро избрушеног врха. Најчешће се користи Траубеов сталагмометар (слика 4.2). На проширеном делу цеви, налазе се ознаке, тако да из стаклене цеви истиче увек иста запремина течности. На крају капиларе се формира кап течности. Кружна хоризонтална површина краја капиларе мора добро да се кваси. (слика 4.3).

Сталагмометријски метод се заснива на одређивању коефицијента површинског напона методом мерења масе или броја капи које се откидају са равне површине краја капиларне цеви. На капљицу која се формира на излазу из капиларе делују две супротно усмерене силе, сила теже:

$$F_g = m \cdot g \quad (4.1)$$

и сила површинског напона:

$$F_\gamma = 2r\pi\gamma \quad (4.2)$$

где је m маса једне капи, r полупречник заравњеног дела сталагмометра (слика 4.3), а γ коефицијент површинског напона течности.

Кап се неће откинути све док је сила теже која делује на кап мања од силе површинског напона. Када сила теже која делује на кап постане нешто већа од силе површинског напона, кап се откида. У тренутку откидања капи, ове две силе су у равнотежи:

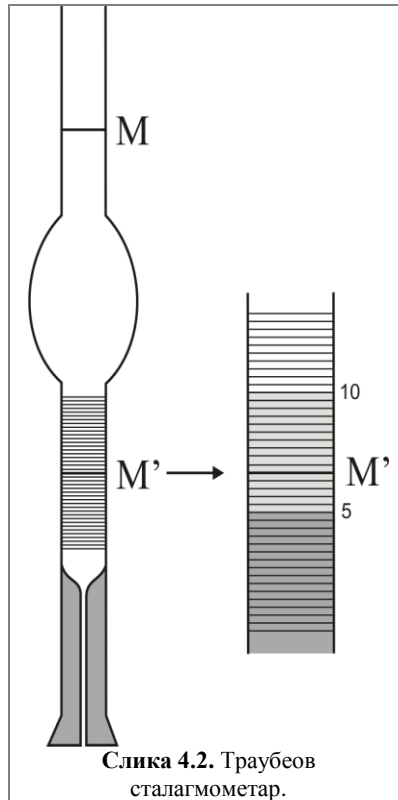
$$m \cdot g = 2r\pi\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{mg}{2r\pi} \quad (4.3)$$

Како су у једначини (4.3) све друге величине познате, потребно је само одредити полупречник капиларе и масу једне капи течности. Сталагмометријско одређивање коефицијента површинског напона спада у релативне методе, јер се коефицијент површинског напона испитиване течности одређује у односу на течност чији је коефицијент површинског напона познат (стандард).

Масу једне капи течности, m , можемо одредити на два начина: методом мерења масе капи и методом бројања капи. Метода мерења масе капи се заснива на мерењу масе већег броја капи које истекну из одређене запремине сталагмометра. Ако ову масу обележимо са m^* и поделимо је бројем капи, n , добијамо масу једне капи:

$$m = \frac{m^*}{n} \quad (4.4)$$

Коефицијент површинског напона испитиване течности, γ_x , се одређује у односу на течност познатог коефицијента површинског напона, γ_o применом релације (4.3) у којој су g и π константе, као



Слика 4.2. Траубеов сталагмометар.

и полупречник капиларе, обзиром да се мерења врше у истом сталагмометру:

$$\frac{\gamma_x}{\gamma_o} = \frac{m_x}{m_o} \Rightarrow \gamma_x = \gamma_o \frac{m_x}{m_o} \quad (4.5)$$

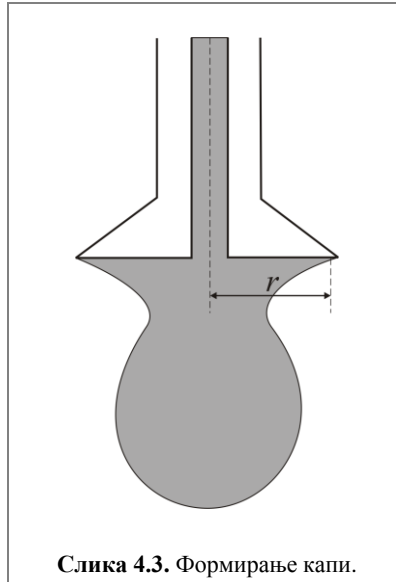
где је m_x -маса једне капи испитиване течности, а m_o -маса једне капи стандарда.

Методом бројања капи се броје капи које истекну из одређене запремине сталагмометра V , испитиване течности густине ρ . Укупна маса капи је: $m^* = V \cdot \rho$, а маса једне капи дата је следећом релацијом:

$$m = \frac{V \cdot \rho}{n} \quad (4.6)$$

Ако у изразу (4.5) заменимо масу једне капи испитиване течности и масу једне капи стандардне течности, релацијом 4.6):

$$\frac{\gamma_x}{\gamma_o} = \frac{\frac{V \cdot \rho_x}{n_x}}{\frac{V \cdot \rho_o}{n_o}} = \frac{n_o \cdot \rho_x}{n_x \cdot \rho_o} \quad (4.7)$$



Слика 4.3. Формирање капи.

добивамо израз за одређивање коефицијента површинског напона испитиване течности методом бројања капи:

$$\gamma_x = \gamma_o \frac{n_o \cdot \rho_x}{n_x \cdot \rho_o} \quad (4.8)$$

где су ρ_o и ρ_x густине стандардне и испитиване течности, а n_o и n_x представљају број капи стандардне и испитиване течности истекле из исте запремине V .

Поступак за одређивање коефицијента површинског напона Траубеовим сталагмометром обухвата неколико сегмената. Обзиром

да је реч о релативној методи, сталагмометар је најпре потребно калибрисати стандардном течношћу (као стандард обично се користи дестилована вода). На одређеној температури (собна температура), чиста и сува стаклена чаша се напуни водом и постави испод сталагмометра. Затим се помоћу гуменог црева, навученог на горњи крај сталагмометра, у добро опран и осушен сталагмометар, уписа дестилована вода из чаше до изнад горње марке M (слика 8.5) и пусти да слободно капље. Ако је брзина капљања сувише велика може се контролисати сужавањем гуменог црева које се поставља на горњи део сталагмометра. Када се ниво воде спусти до ознаке M , почне се са бројањем капи. Капи се броје све док се ниво воде не спусти до доње марке, M' , на сталагмометру. Пошто је део сталагмометријске цеви испод и изнад ознаке M' градуисан (изнад и испод доње марке M' се налази по 20 подеока), број капи се може одредити са прецизношћу до стотог дела капи. Капи се броје од марке M до марке M' с тим да је потребно забележити на ком се подеоку изнад доње марке M' одвојила кап и која је по реду, као и на ком се подеоку испод марке M' одвојила кап и која је по реду. Ако се, на пример, 35. кап одвојила на десетом подеоку изнад марке M' , а 36. кап на 5. подеоку испод марке M' , број капи који је истекао из сталагмометра се може одредити на следећи начин:

$$n = 35 + \frac{1}{10+5} \cdot 10 = 35,67. \text{ Мерење се понови три пута и одреди се}$$

средња вредност броја капи. Затим се стаклена чаша испразни, осуши и напуни испитиваном течношћу. На потпуно исти начин се одреди број капи испитиване течности, чији је коефицијент површинског напона потребно одредити.

Густине воде и испитиване течности, као и коефицијент површинског напона воде на температури на којој је вршено мерење се читају из доступних таблица. Применом једначине (4.8) израчунава се коефицијент површинског напона испитиване течности методом бројања капи.

Коефицијент површинског напона можемо одредити и методом масе капи директним мерењем масе капи које истекну из сталагмометра. Сталагмометар се најпре калибрише течношћу познатог коефицијента површинског напона, воде, чија се вредност може наћи у табелама. Пре почетка мерења, на аналитичкој ваги треба измерити масу празне стаклене чаше, m_p , у коју ће истицати одређени број капи стандарда из сталагмометра, а по завршетку мерења, и масу стаклене чаше са стандардом, m_{p+o} . Из разлике ових маса добијамо масу стандардне течности: $m_o = m_{p+o} - m_p$. Потребно је измерити масу већег броја капи (најмање 20) како би се смањила

грешка одређивања масе једне капи. На исти начин одређујемо и масу испитиване течности: $m_x = m_{p+x} - m_p$, односно једне њене капи. Применом релације (4.5) одређујемо коефицијент површинског напона испитиване течности.

8.4. Задаци

1. Површински напон воденог раствора пиридина на температури од 20 °C је 0,038 Nm⁻¹, а густина на истој температури 980 kgm⁻³. Израчунати пречник капиларе у којој се водени раствор пиридина подигне за 1,6 cm.

Решење:

$$\gamma = 0,038 \text{ Nm}^{-1}$$

$$\rho = 980 \text{ kgm}^{-3}$$

$$h = 1,6 \text{ cm} = 0,016 \text{ m}$$

$$\boxed{d = ?}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \rho g h r \Rightarrow r = \frac{2\gamma}{\rho g h} = \frac{2 \cdot 0,038 \text{ Nm}^{-1}}{980 \text{ kgm}^{-3} \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2} \cdot 0,016 \text{ m}} = 4,94 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$d = 2r = 9,88 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

2. Израчунати површински напон бензола на 20 °C ако маса 42 капи бензола које су истекле из константне запремине сталагмометра, износи 1,5672 g. Маса 30 капи дестиловане воде која истекне из исте запремине сталагмометра, је 2,8180 g. Површински напон воде на 20 °C је 72,75 · 10⁻³ Nm⁻¹.

Решење:

$$n_{\text{benzol}} = 42$$

$$m_{\text{benzol}} = 1,5672 \text{ g}$$

$$n_{\text{voda}} = 30$$

$$m_{\text{voda}} = 2,8180 \text{ g}$$

$$\gamma_{\text{voda}} = 72,75 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}$$

$$\gamma_{benzol} = ?$$

$$\gamma_{benzol} = \gamma_{voda} \cdot \frac{m_{benzol} \cdot n_{voda}}{m_{voda} \cdot n_{benzol}} = 72,75 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}^{-1} \cdot \frac{1,5672 \text{ g} \cdot 30}{2,8180 \text{ g} \cdot 42} =$$

$$= 28,9 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}$$

5. ВИСКОЗНОСТ ТЕЧНОСТИ

У овом поглављу биће речи о још једној од важних особина течности - њеној вискозности. Упознаћемо се са основним појмовима и величинама, као и законима и методама којима се може одредити вискозност.

5.1. Опште карактеристике

Карактеристично својство течности, које се јавља приликом њиховог протицања, јесте **вискозност**. Реч вискозност води порекло од латинске речи *viscum* која значи лепак, односно има значење супротно од речи "течљив". Уље, мед, глицерин и многе друге супстанције су вискозније, односно мање течљиве течности од воде, алкохола или бензина (слика 5.1). Вискознији флуиди дају већи отпор при кретању. Тако је, на пример, кретање у води теже него на сувом.



Слика 5.1. Истицање течности различитих вискозности.

Протицање течности може бити **слојевито** (ламинарно), када се течност понаша као да је сачињена од слојева који клизе један преко другог, и **турбулентно**, када се динамичка својства течности хаотично мењају. Приликом слојевитог протицања течности (које је карактеристично за уске цеви и мале брзине протицања), услед међусобног дејства, сви слојеви течности немају једнаку брзину у смеру течења. Стога се унутар течности јавља отпор којим се поједини слојеви супротстављају кретању једног слоја у односу на други. Овај отпор се назива вискозност. Сила која изражава међусобно деловање слојева флуида, назива се **вискозна сила**. То је

сила која је потребна да би се један слој течности кретао константном брзином у односу на други слој и дата је једначином:

$$F = A \frac{dv}{dx} \eta . \quad (5.1)$$

Ова једначина представља **Њутнов закон вискозности** у којој је F вискозна сила или сила унутрашњег трења која делује на површину A слоја, dv/dx градијент брзине, а η **динамичка вискозност**¹. Њутнов закон вискозности важи само за течности које имају ламинаран ток. Течности за које важи ова релација називају се још и **Њутновске** или **нормалне течности**.

Динамичка вискозност се дефинише као сила на јединицу површине, која је потребна да одржи јединичну разлику брзине dv између два паралелна слоја површине A на јединичном растојању dx :

$$\eta = \frac{F}{A \frac{dv}{dx}} \quad (5.2)$$

Јединица у SI систему за динамичку вискозност је: Pa·s или N·s·m⁻², а често коришћена јединица је поаз, 1 P = 10⁻¹ Pa·s. Вискозност зависи од врсте течности, температуре и у мањој мери од притиска. Реципрочна вредност динамичке вискозности је **флуидност** и представља мерило лакоће којом течност може да тече:

$$\varphi = 1/\eta . \quad (5.3)$$

5.2. Зависност вискозности од температуре

Коефицијент вискозности течности са порастом температуре опада по експоненцијалној зависности коју су дали Аренијус и Гуцман:

$$\eta = A \exp\left(\frac{B}{RT}\right) \quad (5.4)$$

¹ Раније позната и као коефицијент вискозности.

у којој су A и B карактеристичне константе за дату течност. До опадања коефицијента вискозности при порасту температуре долази због тога што са порастом температуре течности расте и средња кинетичка енергија њених молекула, па они могу лакше да надвладају кохезионе силе које узрокују вискозност, што се опажа као лакше протицање течности.

Логаритмовањем израза (5.4) и приказивањем $\log \eta$ у функцији $1/T$, добија се добра линеарна зависност за велики број Њутновских течности.

5.3. Одређивање динамичке вискозности методом капиларног вискозиметра

Ова метода се заснива на примени Поазејевог закона за истицање течности апсолутне густине $\rho_{4^{\circ}}$ кроз капилару:

$$\eta = \frac{\pi r^4 t \Delta P}{8lV} = \frac{\pi \rho_{4^{\circ}} g h r^4 t}{8lV} \quad (5.5)$$

у којој је η динамичка вискозност, $\Delta P = \rho_{4^{\circ}} g h$ разлика притисака на крајевима капиларе, r полупречник капиларе, l дужина капиларе, а V запремина течности која истекне кроз капилару за време t . Једначина важи само за ламинарни ток течности. Пошто се овом методом врше мерења и за стандардну и за испитивану течност, то се динамичка вискозност испитиване течности добија се применом израза:

$$\eta_x = \eta_{H_2O} \cdot \frac{\rho_{4^{\circ},x} \cdot t_x}{\rho_{4^{\circ},H_2O} \cdot t_{H_2O}} \quad (5.6)$$

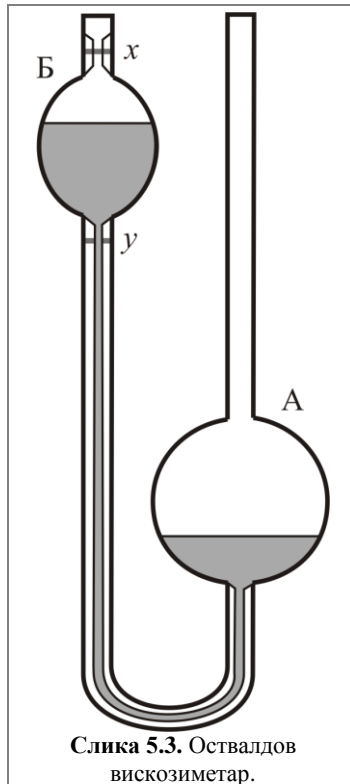
чије је извођење детаљно описано у експерименталном делу у оквиру одређивања коефицијента вискозности Оствалдовим вискозиметром. Овим типом вискозиметра коефицијент вискозности течности може да се одреди у границама од 0,1 до $5 \cdot 10^3$ mPa·s.

5.4. Експериментални део – одређивање динамичке вискозности Оствалдовим вискозиметром

Оствалдов вискозиметар је стаклена цев облика латиничног слова U са два мала проширења (слика 5.3), помоћу које је могуће одредити динамичку вискозност по методи капиларног вискозиметра. Састоји се од балона Б са горњом ознаком x и доњом ознаком y , који је капиларном цеви припојен за балон А. Метода је релативна, јер се врши упоређивање брзина истицања запремине течности познате динамичке вискозности, стандарда, најчешће дестиловане воде, са брзином истицања исте запремине течности чију динамичку вискозност желимо да одредимо. Оба мерења се врше на истој температури.

Пре почетка мерења потребно је калибрисати вискозиметар, односно одредити константу вискозиметра K , која зависи од карактеристика самог вискозиметра. Калибрација се изводи тако што се у претходно опран и осушен вискозиметар, тачније у балон А, пипетом унесе одређена запремина течности познате динамичке вискозности, најчешће воде. Имајући у виду да коефицијент вискозности зависи од температуре, вискозиметар напуњен водом је потребно термостатирати (на $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ или $25\text{ }^{\circ}\text{C}$) најмање 15 минута. Након термостатирања, вода из балона А се повуче вакуумом до балона Б, тако да ниво течности буде изнад ознаке x и мери се време t за које течност истекне између две ознаке, x и y . Мерење се понавља још најмање два пута и одреди се средња вредност времена истицања воде између ове две марке. Ако се времена истицања разликују за више од $0,2\text{ s}$ мерење је потребно поновити.

Када је вискозиметар калибрисан, вискозиметар се испразни и добро осуши. Затим се пипетом одмери иста запремина течности



чији коефицијент вискозности треба одредити. Одмерена запремина испитиване течности мора бити једнака запремини воде којом смо калибрисали вискозиметар, јер се само у том случају може користити вредност константе вискозиметра. Вискозиметар се на истој температури термостатира 15 минута. На претходно описан начин се изврши мерење времена истицања течности, од марке x до марке y . Мерење се понови још два пута, а затим се одреди средња вредност времена истицања.

Разлика притисака услед које течност протиче кроз капилару је дата изразом: $\Delta P = \rho_{4^{\circ}}^{\rho} g h$, у коме је h разлика висина нивоа течности у два крака вискозиметра. Као што је показано у једначини (5.5), динамичка вискозност, η се може представити изразом:

$$\eta = \frac{\rho_{4^{\circ}}^{\rho} \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot r^4 \cdot t}{8l \cdot V} = K \cdot \rho_{4^{\circ}}^{\rho} \cdot t \quad (5.7)$$

у коме је K константа вискозиметра, t време истицања течности између две марке вискозиметра и $\rho_{4^{\circ}}^{\rho}$ густина течности. Динамичке вискозности воде η_{H_2O} , и испитиване течности η_x , могу се сада изразити на следећи начин:

$$\eta_{H_2O} = K \cdot \rho_{4^{\circ}, H_2O}^{\rho} \cdot t_{H_2O} \quad (5.8)$$

$$\eta_x = K \cdot \rho_{4^{\circ}, x}^{\rho} \cdot t_x \quad (5.9)$$

Обзиром да се мерења врше у истом вискозиметру, константа K за дестиловану воду као стандард и испитивану течност има исту вредност. Дељењем једначина (5.9) и (5.8) и сређивањем по η_x добијамо израз за израчунавање динамичке вискозности испитиване течности:

$$\eta_x = \eta_{H_2O} \frac{\rho_{4^{\circ}, x}^{\rho} \cdot t_x}{\rho_{4^{\circ}, H_2O}^{\rho} \cdot t_{H_2O}} \quad (5.10)$$

где су $\rho_{4^{\circ}, H_2O}^{\rho}$ и $\rho_{4^{\circ}, x}^{\rho}$ густине воде и испитиване супстанције, редом, на температури експеримента, а t_{H_2O} и t_x времена истицања воде и испитиване супстанције. Вредности $\rho_{4^{\circ}, H_2O}^{\rho}$ и η_{H_2O} на температури

експеримента могу се наћи у одговарајућим табелама. Вредност $\rho_{4^\circ, x}^{t^\circ}$ се може наћи у литератури или се може експериментално одредити.

5.5. Задаци

1. Густина неке супстанције на температури 50°C износи $1,045\text{ gcm}^{-3}$, а густина воде на истој температури $0,988\text{ gcm}^{-3}$. Испитивана супстанција протиче кроз вискозиметар за $150,6\text{ s}$, док је за исту запремину воде потребно $14,0\text{ s}$. Израчунати динамичку вискозност испитиване супстанције, ако је динамичка вискозност воде на датој температури $0,548 \cdot 10^{-3}\text{ Pa}\cdot\text{s}$.

Решење:

$$\theta = 50^\circ\text{C}$$

$$\rho_{4^\circ, x}^{t^\circ} = 1,045\text{ gcm}^{-3}$$

$$\rho_{4^\circ, H_2O}^{t^\circ} = 0,988\text{ gcm}^{-3}$$

$$t_x = 150,6\text{ s}$$

$$t_{H_2O} = 14,0\text{ s}$$

$$\eta_{H_2O} = 0,548 \cdot 10^{-3}\text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\eta_x = ?$$

$$\eta_x = \eta_{H_2O} \frac{\rho_{4^\circ, x}^{t^\circ} t_x}{\rho_{4^\circ, H_2O}^{t^\circ} t_{H_2O}} = 0,548 \cdot 10^{-3}\text{ Pa}\cdot\text{s} \frac{1,045\text{ gcm}^{-3} \cdot 150,6\text{ s}}{0,988\text{ gcm}^{-3} \cdot 14\text{ s}} =$$

$$= 6,23 \cdot 10^{-3}\text{ Pa}\cdot\text{s}$$

2. Ричиновско уље на температури 20°C има динамичку вискозност $\eta = 4,77\text{ Pa}\cdot\text{s}$ и густину $0,96\text{ gcm}^{-3}$. Куглица пречника 10 mm и густине $7,65\text{ gcm}^{-3}$ слободно пада кроз ову вискозну средину. Израчунати време за које куглица пређе пут од 2 dm .

Решење:

$$\eta = 4,77\text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\theta = 20^\circ\text{C}$$

$$\rho_{4^\circ}' = 0,96\text{gcm}^{-3} = 960\text{kgm}^{-3}$$

$$\rho_{4^\circ}'' = 7,65\text{gcm}^{-3} = 7650\text{kgm}^{-3}$$

$$d = 10\text{ mm}$$

$$r = 5\text{ mm} = 0,005\text{ m}$$

$$l = 2\text{ dm} = 0,2\text{ m}$$

$$\boxed{t = ?}$$

$$\eta = \frac{2r^2 g (\rho_{4^\circ}'' - \rho_{4^\circ}')}{9v} = \frac{2r^2 g (\rho_{4^\circ}'' - \rho_{4^\circ}') t}{9l}$$

$$t = \frac{9l\eta}{2r^2 g (\rho_{4^\circ}'' - \rho_{4^\circ}')} = \frac{9 \cdot 0,2\text{ m} \cdot 4,77\text{ Pa} \cdot \text{s}}{2(0,005\text{ m})^2 \cdot 9,81\text{ ms}^{-2} \cdot (7650 - 960)\text{ kgm}^{-3}} = 2,62\text{ s}$$

3. Одредити динамичку вискозност воде на температури 20°C ако из капиларе дужине 10 dm и пречника 8 mm , под притиском који даје стуб воде висине 50 cm , за 3 минута истекне 217 cm^3 воде. Густину воде на 20°C очитати из табеле 7 у Прилогу.

Решење:

$$\theta = 20^\circ\text{C}$$

$$l = 10\text{ dm} = 0,1\text{ m}$$

$$d = 8\text{ mm}$$

$$r = 4\text{ mm} = 0,004\text{ m}$$

$$h = 50\text{ cm} = 0,5\text{ m}$$

$$t = 3\text{ min} = 180\text{ s}$$

$$V = 217\text{ cm}^3 = 2,17 \cdot 10^{-4}\text{ m}^3$$

$$\boxed{\eta = ?}$$

$$P = \rho_{4^\circ, H_2O}'' gh = 998,230\text{ kgm}^{-3} \cdot 9,81\text{ ms}^{-2} \cdot 0,5\text{ m} = 4896,3\text{ Pa}$$

$$\eta = \frac{r^4 \pi P t}{8LV} = \frac{(4 \cdot 10^{-4}\text{ m})^4 \cdot 3,14 \cdot 4896,3\text{ Pa} \cdot 180\text{ s}}{8 \cdot 0,1\text{ m} \cdot 2,17 \cdot 10^{-4}\text{ m}^3} = 0,00041\text{ Pa} \cdot \text{s}$$

ПРИЛОГ

Табела 1. Основне величине у SI са називима и ознакама јединица.

| Физичка величина | Назив јединице | Ознака |
|----------------------------|----------------|--------|
| Дужина | метар | m |
| Маса | килограм | kg |
| Време | секунда | s |
| Јачина електричне струје | ампер | A |
| Термодинамичка температура | келвин | K |
| Светлосна јачина | кандела | cd |
| Количина супстанције | мол | mol |

Дефиниције основних јединица:

Метар је дужина пута коју светлост пређе у вакууму за време од $(1/299\,792\,458)$ делова секунде.

Килограм је маса међународног еталона масе, који се налази у Међународном бироу за мере и тегове у Севру крај Париза.

Секунда је трајање $9\,192\,631\,770$ периода зрачења које одговара прелазу између два хиперфина енергијска нивоа основног стања чистог изотопа ^{133}Cs .

Ампер је јачина оне једносмерне струје која када протиче кроз два праволинијска паралелна проводника бесконачне дужине на међусобном растојању од једног метра у вакууму, производи силу између проводника интензитета од $2 \cdot 10^{-7}$ њутна по метру дужине.

Келвин је $1/273,16$ -ти део термодинамичке температуре тројне тачке воде.

Кандела је светлосна јачина у датом правцу, из извора који емитује монохроматско зрачење учестаности $540 \cdot 10^{12}$ херца, а има у том правцу енергетску јачину од $1/683$ вата постерадијану.

Мол је количина супстанције (градива) у систему који садржи онолико елементарних јединки колико има атома у $0,012$ килограма чистог изотопа ^{12}C . Број атома у $0,012$ килограма чистог изотопа ^{12}C једнак је Авогадроовој константи, $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Потребно је одредити елементарну јединку која може бити атом, молекул, јон, електрон, фотон или одређена група ових јединки.

Табела 2. Префикси SI јединица.

| Умножак | Префикс | Симбол | Умножак | Префикс | Симбол |
|------------|---------|--------|-----------|---------|--------|
| 10^{-1} | деци | d | 10 | дека | da |
| 10^{-2} | центи | c | 10^2 | хекто | h |
| 10^{-3} | мили | m | 10^3 | кило | k |
| 10^{-6} | микро | μ | 10^6 | мега | M |
| 10^{-9} | нано | n | 10^9 | гига | G |
| 10^{-12} | пико | p | 10^{12} | тера | T |
| 10^{-15} | фемто | f | 10^{15} | пета | P |
| 10^{-18} | ато | a | 10^{18} | екса | E |